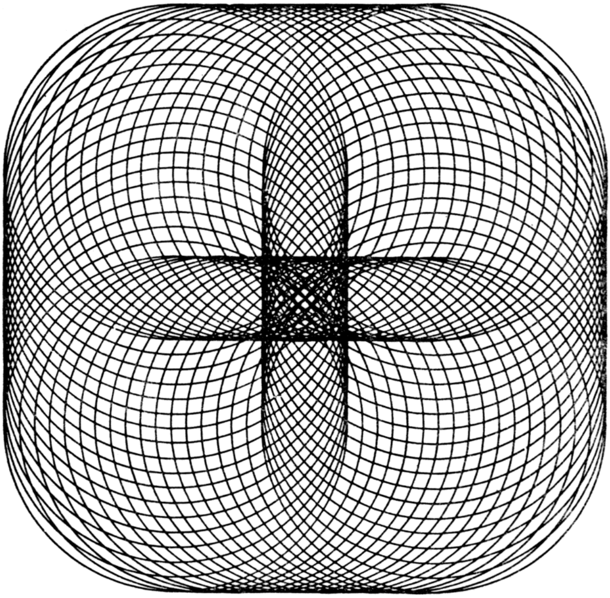
リー群の話——佐武一郎



日評数学選書——日本評論社

まえがき

「リー群の話」は昭和55年から56年にかけて『数学セミナー』に連載したものにごくわずかの修正を加えたものである．

数学科の学生諸君は勿論，そうでない方々でも“リー群”という言葉をきいて興味をもっておられる方はかなり多いのではないかと思う．しかしリー群に関する正統の教科書は多くの専門的予備知識（位相空間，多様体論等）を必要とするので仲々取りつき難く，そのためにリー群論そのものも敬遠されてしまうことが多いのではあるまいか．だがリー群の中で理論的にも応用上も最も大切なマトリックスの群だけに限って説明するならば，大学初年級の知識（線形代数や微積分）で十分間に合うと思われる．このような立場から，主として大学の二，三年生諸君を対象に，リー群論への informal な入門書，参考書となるように心がけてかいたのがこの「話」である．

現代的にいえば“リー群”は“群”と“多様体”の二つの概念を結合させてできたものである．周知のように“群”も“多様体”も共に現代数学では最も基本的な概念であるから，いわばこの二つの“良家”の縁組の結果生れた“リー群”は数学の多くの重要な分野に関係する非常に大切な基礎概念なのである．実際，歴史的にもリー群は抽象群論が展開されるはるか以前から，“変換群”としてユークリッド以来の幾何学や微分方程式論に影の役者として登場していたのであった．群や多様体の概念はむしろこの幾何学的変換群の概念を一つの母体として抽象化されてきたものなのである．

従ってリー群論を正規に学ぼうとすれば，どうしても線形代数の他に，群，位相空間，多様体等に関する基本事項を一つ一つ学んでゆかなければならな

い．しかしこれら抽象的一般論をただ論理的にたどってゆくのは無味乾燥なことかもしれない．丁度よく鋪装されてはいるが行き先きの見えないトンネルの中を走ってゆくようなものである．そのようなとき少し脇道に入って，不完全ではあっても“リー群”の実体を簡単な実例によってまず把握し，それを念頭におきながら，抽象論に戻ってゆくのも一つの有力な勉強法であろうと思われる．

「話」の第1～6章では主としてリー群とリー環の対応について，第7～10章では変換群としてのリー群について，第11～13章ではリー群の作用する空間における不変微分作用素について説明した．これらはごく限られた話題にすぎないが，リー群論における大切な論点のいくつかを明示しようと努めたつもりである．系統的な教科書ではないので難易不揃いな「読物」になってしまったが，読者に抽象数学のトンネルから出てしばらく山道を散策する機会を提供できたならば，著者の本懐とする所である．

「線形代数雑談」と「マルグリス」もやはり『数学セミナー』に載ったもので，前者は線形代数に関するいくつかの話題を，後者はリー群の不連続群に関するマルグリスの業績を説明したものである．いずれも「リー群の話」と密接な関係があるので，ここにまとめて上梓することにした．便宜上これらを「話」，「雑談」，「マルグリス」として相互に引用する．本書で必要とする線形代数の基礎事項は大ていの教科書にかいてあることであるが，便宜上拙著『線型代数学』(裳華房）を（「線型代数学」として）引用しておいた．そのいくつかは「雑談」の中にも説明されているので，線形代数を余り精しく習わなかった読者は「話」の前に「雑談」を読まれることをおすすめする．「マルグリス」の方はやや専門的な読物であるが，リー群論と整数論との関係を知る上に役に立つと思う．リー群について更に学んでゆかれる読者のために「話」の最後にリー群に関する参考書を列記しておいた．本文中ではその番号に従って Chevalley [5] のように引用する．

最後に日本評論社編集部の方々の御尽力に対し心から御礼申上げたい．

昭和57年正月，仙台にて　　著者

目　次

リー群の話

線形代数雑談

装幀＝杉浦康平＋海保 透

リー群の話

第1章　リー群とは何か？

はじめに

はじめにお断りしておきたいが，この本はリー群に関する系統的な議義でもなければ，その歴史的な解説でもない．リー群の基本的な概念や結果のいくつかをできるだけ少い予備知識（線形代数と 解析の初歩$+\alpha$）の下に，実例に即して説明してみようとするものである．

少し突飛な例かもしれないが，例えばチューリップを知らない人はいないだろう．我々はそれを目で見て知っているのである．チューリップを“知る”ために植物学の知識は少しも必要ではない．蜜蜂は言葉をもたないからこの花に名前さえつけていないだろうが，この花の構造については我々よりはるかによく知っているのである．

数学は一つの理論体系なのだから，正確な定義や推論が必要なことはいうまでもない．しかしそれらを導くものは数や図形に対する直観であり，その第一歩は やはり数学の対象に対する即物的な認識なのでは なかろうか．（この意味で「抽象数学」という言葉ほど誤解されやすい言葉はない．）数学の対象の中でもリー群などは非常に具体的な“もの”ということができると思う．

バークレイでは大学院の資格試験（Qualifying Exam）のとき学生がえらんだ三つのトピックスについて口頭試問をすることになっているが，あるとき一つのトピックに Lie groups とあり，Poincaré–Witt–Birkhoff の定理，Campbell–Hausdorff の公式などとむずかしそうなことがかいてあったので，「リー群の例を一つあげてごらん」ときいたところ，「知らない」という返事がかえってきておどろいたことがある．この学生などよほどの間抜けか，さ

もなければ大天才なのであろう．（と思ったのだが，実際にはそのどちらでもなくまったく普通の学生だったようである．）ともあれ一般的にいって，何かを学ぼうとするときには，まずその実例を知ることが一つの大切な手段である．

このような趣旨にしたがって，リー群をできるだけ即物的に，目に見えるように，説明してみたいと思う．

1．行列の群

さてリー群の例としてさし当り $GL(n, \boldsymbol{R}), SL(n, \boldsymbol{R}), O(n)$ の三つを考えることにしよう．そのためにはまず行列の基本的な演算について少し復習しておく必要がある．

n を正の整数とするとき，n 次の“行列”とは n^2 個の実数を正方形に並べたもので，それを二重の添数 $i, j = 1, \cdots, n$ によって $x = (x_{ij})$ のように表わすことなど周知であろう．x_{ij} は行列 x の (i, j) 番目の“座標”または“成分”を表わすのである．例えば

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

においては $x_{11} = 1,\ x_{12} = 2,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = -1$ である．二つの n 次行列 $x = (x_{ij}),\ y = (y_{ij})$ の積は

(1)
$$xy = \left(\sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}\right)$$

によって定義される．すなわち xy はその (i, j) 成分が $\sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj}$ によって与えられるような n 次行列である．例えば

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

に対し

$$xy = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + (-1)(-2) & 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

行列の乗法に関して可換律：$xy = yx$ は一般に成立しない．実際，上の例でも

$$yx = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} \neq xy.$$

しかしその他の法則，結合律，分配律などはみな成立している．

(2) $$(xy)z = x(yz),$$

(3) $$(x+y)z = xz+yz, \quad \text{etc.}\cdots\cdots$$

(x, y, z はいずれも n 次行列)．また“単位行列”を

$$1_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

とかくことにすれば，任意の n 次行列 x に対して

(4) $$x1_n = 1_n x = x$$

が成立する．すなわち 1_n は数の乗法における 1 と同じ役割を果しているのである．（行列の記法や演算に不馴れな読者は (2), (3), (4) などの等式を行列の和や積の定義から証明してみられるとよい．）

与えられた n 次行列 x に対し

(5) $$xy = yx = 1_n$$

となるような n 次行列 y が存在するとき，x を“可逆”(invertible, non-singular) という．このとき y は x によってただ一つ定まる．（実際には，$xy = 1_n$, $yx = 1_n$ のどちらか一つをみたすような y が存在すれば，そのような y は一意的に定まり，他の等式も自然に満足することが証明される†)．）したがって方程式 (5) の解 y を x^{-1} で表わし，x の“逆”という．例えば $1_n{}^2 = 1_n$ であるから，1_n は確かに可逆で $1_n{}^{-1} = 1_n$.

よく知られているように，n 次行列 x が可逆であるためには その行列式

†) 例えば，「線型代数学」p. 13，定理 1 およびその後の注意参照.

($\det(x)$ とかく) がゼロでないことが必要十分である．例えば $n=2$ のとき

$$x=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \text{ が可逆}$$

$$\Longleftrightarrow \det(x)=x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}\neq 0.$$

この場合，$x'=\begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix}$ とおけば，行列の積の定義から

$$xx'=x'x=\begin{pmatrix} \det(x) & 0 \\ 0 & \det(x) \end{pmatrix}=\det(x)\cdot 1_2$$

という関係が得られる．したがって $y=\det(x)^{-1}x'$ とおけば $xy=yx=1_2$，すなわち $y=x^{-1}$ である．よって

$$x^{-1}=\det(x)^{-1}\begin{pmatrix} x_{22} & -x_{12} \\ -x_{21} & x_{11} \end{pmatrix} \tag{6}$$

という公式が得られた．$n>2$ の場合にも x^{-1} を x の小行列式を使って表わす公式がある[†]．

さて二つの n 次行列 x, y が可逆ならば，その積 xy も可逆である．実際，

$$\begin{aligned}(xy)(y^{-1}x^{-1})&=(x(yy^{-1}))x^{-1}=(x1_n)x^{-1}\\&=xx^{-1}=1_n,\end{aligned}$$

同様にして $(y^{-1}x^{-1})(xy)=1_n$ であるから，xy は可逆であり $(xy)^{-1}=y^{-1}x^{-1}$．(xy が可逆なことは $\det(xy)=\det(x)\det(y)\neq 0$ であることからもわかる．) また定義から明らかに，x が可逆ならば，x^{-1} も可逆で $(x^{-1})^{-1}=x$.

以上述べたことは要するに n 次の可逆行列全体の集合が乗法に関して一つの "群" を作ることにほかならない．その際，"単位元" は 1_n である．この群を $GL_n(\boldsymbol{R})$，または $GL(n, \boldsymbol{R})$ とかくのである．(この群を General Linear Group という．GL はその略号である．)

2. $SL(n, \boldsymbol{R})$ と $O(n)$

次に $GL(n, \boldsymbol{R})$ の部分集合

†) 「線型代数学」p. 61，定理6参照.

$$\{\, x \in GL(n,\boldsymbol{R}) \mid \det(x)=1 \,\}$$

を考える．上にも述べたように行列式には

$$(7)\qquad \begin{cases} \det(xy)=\det(x)\det(y), \\ \det(x^{-1})=\det(x)^{-1}, \\ \det(1_n)=1 \end{cases}$$

という性質があるから，$x, y \in GL(n,\boldsymbol{R})$ に対して

$$\det(x)=\det(y)=1 \Longrightarrow \begin{cases} \det(xy)=1, \\ \det(x^{-1})=1. \end{cases}$$

したがって上記の部分集合は群の演算：$(x,y)\longmapsto xy$, $x\longmapsto x^{-1}$ に関して閉じている．すなわち，$GL(n,\boldsymbol{R})$ の“部分群”になっている．この群を $SL_n(\boldsymbol{R})$ または $SL(n,\boldsymbol{R})$ とかく．(これは Special Linear Group の略号である．)── これを群論的にいい表わせば，写像

$$x \longmapsto \det(x)$$

が $GL(n,\boldsymbol{R})$ から (0でない) 実数の乗法群 $\boldsymbol{R}^\times$ の上への“準同型”になっており，$SL(n,\boldsymbol{R})$ はその“核”である．したがって $SL(n,\boldsymbol{R})$ は単に部分群であるばかりでなく“正規部分群”(normal subgroup) になっているのである．(一般に群 G の部分群 H は，すべての $g \in G$ に対し $g^{-1}Hg=H$ であるとき，“正規部分群”であるという．)

さらに $GL(n,\boldsymbol{R})$ の部分群の例として直交行列全体の作る群をあげることができる．まず，一般に n 次行列 $x=(x_{ij})$ に対し，その“転置行列”(transpose) ${}^t x$ をその (i,j) 成分が x_{ji} であるような行列として定義する．例えば

$$x=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow {}^t x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

x が条件

$$(8)\qquad x\,{}^t x={}^t x x=1_n$$

をみたすとき，**直交行列**という．(8) は x が可逆であり，$x^{-1}={}^t x$ となるということを意味している．例えば，$1_n{}^{-1}=1_n={}^t 1_n$ であるから，1_n は直

交行列である．また x, y がともに直交行列ならば

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = {}^t y {}^t x = {}^t(xy) \qquad \text{（積の順序に注意）}$$

であるから積 xy もまた直交行列である．さらに

$$(x^{-1})^{-1} = x = {}^t({}^t x) = {}^t(x^{-1})$$

であるから，x^{-1} も直交行列である．したがって n 次直交行列の全体もまた $GL(n, \boldsymbol{R})$ の一つの部分群になっている．これを n 次の**直交群**（Orthogonal Group）といい，$O(n)$ で表わす．

条件 (8) の各辺の行列式をとれば

$$\det(x)\det({}^t x) = \det(1_n) = 1.$$

しかし $\det({}^t x) = \det(x)$ であるから，$\det(x)^2 = 1$，したがって，$\det(x) = \pm 1$ であることがわかる．ここで $\det(x) = -1$ となるような直交行列も実際存在する．例えば

$$x_0 = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，確かに $\det(x_0) = -1$．そこで

$$SO(n) = O(n) \cap SL(n, \boldsymbol{R}) \qquad \text{（$\cap$ は集合の交わり）}$$

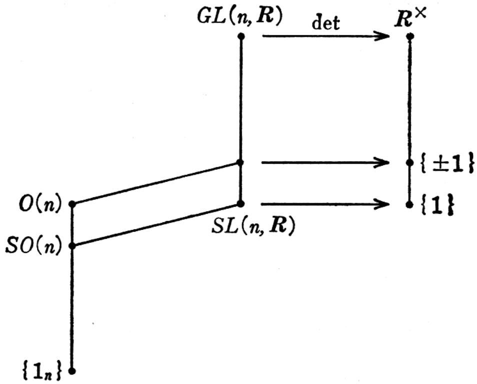
とおけば $SO(n)$ も一つの部分群で，簡単な群論的考察からわかるように，上の x_0 を使って $O(n)$ は

(9)　$$O(n) = SO(n) \cup x_0 SO(n) \qquad \text{（$\cup$ は和集合）}$$

と二つの部分集合の和に分解される．（これを群論的に，$SO(n)$ は $O(n)$ の“位数” 2 の部分群である，といい表わす．）

これまでに定義した行列の群の包含関係を図示すれば (10)（次頁）のようになる．

(10)



3. 図形としての行列群

さて今までは行列の代数的な面をみてきたのだが，n 次行列 $x=(x_{ij})$ は n^2 個の“座標”で決まるのだから n^2 次元空間の“点”とみなすこともできる．例えば 2 次行列

$$x=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

は $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})$ を座標にもつ 4 次元空間の点，3 次行列

$$x=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

は $(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33})$ を座標にもつ 9 次元空間の点というように考えるのである．そのとき上に定義した群 $GL(n, \boldsymbol{R})$, $SL(n, \boldsymbol{R})$, $O(n)$ 等はどんな“図形”であろうか？

まず $GL(n, \boldsymbol{R})$ についていえば，これは n 次行列全体の作る n^2 次元空間（それを $\boldsymbol{R}^{n^2}$ とかく）の中から行列式がゼロとなるようなものをとり除いた残りである．より正確にいえば，方程式

(11)
$$\det(x)=0$$

によって定義された集合 N を $\boldsymbol{R}^{n^2}$ から引いた余集合である：

(12)
$$GL(n, \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^{n^2} - N.$$

Nは（代数的）方程式(11)によって定義される集合だから，いわば一種の（代数的）曲面である．ここではそれを“超曲面”と呼ぶことにしよう．

超曲面Nにはいろいろな性質があるが，まず位相的にそれは“閉集合”である．すなわち，Nの中からとった点の列（今の場合は行列の列！）x_ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$が$\boldsymbol{R}^{n^2}$の中で点（行列）x_0に収束すれば，x_0もNに属する．ここで行列x_νがx_0に収束するというのは，x_νの各成分が，対応するx_0の成分に収束することをいう．すなわち$x_\nu = (x_{ij}{}^{(\nu)})$, $x_0 = (x_{ij}{}^{(0)})$とおけば，

$$\lim_{\nu\to\infty} x_{ij}{}^{(\nu)} = x_{ij}{}^{(0)} \qquad (i, j = 1, 2, \cdots, n)$$

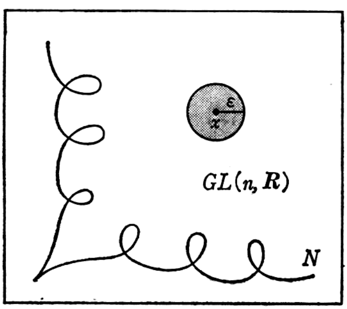
となることをいう．上述のこと（$x_\nu \in N$, $\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$ ならば，$x_0 \in N$ ということ）は$\det(x)$の連続性から明らかである．実際，$\det(x)$はxの成分x_{ij}の多項式，したがって連続関数であるから，$\lim_{\nu\to\infty} x_\nu = x_0$のとき

$$\lim_{\nu\to\infty} \det(x_\nu) = \det(x_0),$$

よって$\det(x_\nu) = 0$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$から，$\det(x_0) = 0$すなわち$x_0 \in N$を得る．――Nが閉集合であるからその余集合$GL(n, \boldsymbol{R}) = \boldsymbol{R}^{n^2} - N$は“開集合”である．いいかえれば，$GL(n, \boldsymbol{R})$の点$x$の十分小さい近傍，例えば$x$を中心とする（$n^2$次元の）“$\varepsilon$-球”

$$\{ y \in \boldsymbol{R}^{n^2} \mid |y - x| < \varepsilon \}$$

は$GL(n, \boldsymbol{R})$の中にすっぽりと入っているのである．（ここで$|y-x|$はx, yのユークリッド的距離を表わす．すなわち，$|y-x| = \left(\sum_{i,j=1}^{n} (y_{ij} - x_{ij})^2\right)^{1/2}$．）



$\boldsymbol{R}^{n^2}$

図1

4. 超曲面としての $SL(n, \boldsymbol{R})$

次に $SL(n, \boldsymbol{R})$ はどうか？ $SL(n, \boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の中で方程式

$$\det(x) = 1 \tag{13}$$

で定義されているから，それ自身一つの超曲面である．しかしこの超曲面は上記の N に比べてずっとよい性質をもっている．それはそれが特異点のない“滑らかな”曲面であるということである．“滑らか”というのは，全体的には曲っているが，局所的にみれば“超平面”（今の場合，n^2-1 次元のユークリッド空間）と非常に近い構造をもっているということである．このことを数学的に表現すれば，各点で“接平面”（接超平面というべき？）が作れるということになる．（滑らかな曲線とは各点で接線が引ける曲線であった．今その高次元空間における analogy を考えているのである．）

例えば，4次元空間で方程式

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{14}$$

で定義される超曲面を考えてみよう．ただし F は連続的に微分可能な関数とする．よく知られているように，その上の一点 $x^0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, x_3{}^0, x_4{}^0)$ において，偏導関数のベクトル

$$(\mathrm{grad}\, F)(x^0) = (F_{x_1}(x^0), F_{x_2}(x^0), F_{x_3}(x^0), F_{x_4}(x^0)) \tag{15}$$

$$\left(\text{ただし，} F_{x_i}(x^0) = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x^0)\right)$$

がゼロ，すなわちその四つの成分が全部ゼロ，でないならば，その点において接平面が引けて，その方程式は

$$\sum_{i=1}^{4} F_{x_i}(x^0)(x_i - x_i{}^0) = 0 \tag{16}$$

（あるいはベクトルの記法で，$(\mathrm{grad}\, F)(x^0)\cdot(x - x^0) = 0$）で与えられる（図2）．さらに陰関数の存在定理によれば，条件（14）の下に，点 x^0 の近傍の超曲面 $F=0$ 上の部分は，3次元ユークリッド空間の中の近傍（例えば ε-球）と同相になる．すなわち両連続な写像で1対1対応がつけられる．この写像は微分可能に作れるのだから，“可微分同相”（diffeomorphic）とい

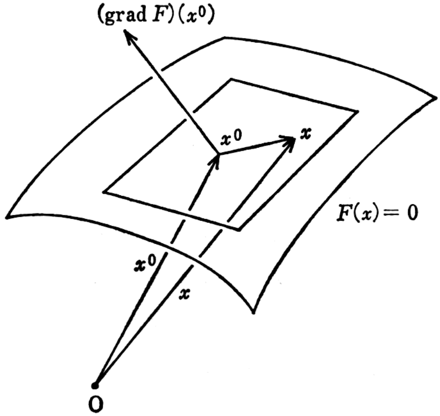


図 2　x, x^0 等は点の座標を表わすと同時にその点の位置ベクトルをも表わす．点 x が x^0 における接平面上にあれば，ベクトル $x-x^0$ は (grad F)(x^0) と直交している．

うべきかもしれないが，我々が以下考える例では関数はいつでも解析関数（実際，大ていは有理式）であるから，“解析同相”ということにしよう．

さて $SL(2, \boldsymbol{R})$ の場合は，$\boldsymbol{R}^4$ の中で

$$F(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}) = x_{11}x_{22}-x_{12}x_{21}-1 = 0$$

で定義された超曲面である．偏微分を計算してみれば

$$F_{x_{11}} = x_{22}, \qquad F_{x_{12}} = -x_{21},$$
$$F_{x_{21}} = -x_{12}, \qquad F_{x_{22}} = x_{11}.$$

$x^0 = (x_{ij}{}^0) \in SL(2, \boldsymbol{R})$ に対しては，

$$F(x^0) = x_{11}{}^0x_{22}{}^0-x_{12}{}^0x_{21}{}^0-1 = 0$$

であるから，確かに

$$(\mathrm{grad}\, F)(x^0) = (x_{22}{}^0, -x_{21}{}^0, -x_{12}{}^0, x_{11}{}^0) \neq 0.$$

よって接平面が存在する．その方程式 (16) の左辺は

$$(\mathrm{grad}\, F)(x^0)\cdot(x-x^0) = x_{22}{}^0(x_{11}-x_{11}{}^0)+(-x_{21}{}^0)(x_{12}-x_{12}{}^0)$$
$$+(-x_{12}{}^0)(x_{21}-x_{21}{}^0)+x_{11}{}^0(x_{22}-x_{22}{}^0)$$

$$= x_{22}{}^0 x_{11} - x_{21}{}^0 x_{12} - x_{12}{}^0 x_{21} + x_{11}{}^0 x_{22} - 2(x_{11}{}^0 x_{22}{}^0 - x_{12}{}^0 x_{21}{}^0)$$

$$= \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21}{}^0 & x_{22}{}^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}{}^0 & x_{12}{}^0 \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} - 2.$$

よって x^0 における接平面の方程式は

$$\begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21}{}^0 & x_{22}{}^0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_{11}{}^0 & x_{12}{}^0 \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} = 2 \tag{17}$$

で与えられる．

また x^0 において，例えば $x_{22}{}^0 \neq 0$ とすれば，x^0 の近傍においても $x_{22} \neq 0$. したがって $SL(2, \boldsymbol{R})$ の方程式を

$$x_{11} = \frac{x_{12}x_{21}+1}{x_{22}}$$

とかくことができる．よって x^0 の近傍におけるパラメーター（局所座標）として

$$t_1 = x_{12} - x_{12}{}^0, \qquad t_2 = x_{21} - x_{21}{}^0, \qquad t_3 = x_{22} - x_{22}{}^0$$

をとれば，対応

$$(t_1, t_2, t_3) \longmapsto \left(\frac{(t_1+x_{12}{}^0)(t_2+x_{21}{}^0)+1}{t_3+x_{22}{}^0}, t_1+x_{12}{}^0, t_2+x_{21}{}^0, t_3+x_{22}{}^0\right)$$

が $SL(2, \boldsymbol{R})$ における x^0 の近傍と，$\boldsymbol{R}^3$ における 0 の近傍との解析同相を与える．

一般の n に対しても，行列式がその各行の変数に対して線形であるという性質から容易に grad det を計算することができ，$\det(x^0) = 1$ ならば grad $\det(x^0) \neq 0$ であることがわかる．また $\det(x^0)$ の第 i 行を変数 $(x_{i1}, \cdots, x_{in})$ でおきかえたもの，すなわち

$$i) \begin{vmatrix} x_{11}{}^0 & \cdots\cdots & x_{1n}{}^0 \\ & \cdots\cdots & \\ x_{i1} & \cdots\cdots & x_{in} \\ & \cdots\cdots & \\ x_{n1}{}^0 & \cdots\cdots & x_{nn}{}^0 \end{vmatrix}$$

を $\det^{(i)}(x, x^0)$ とかくことにすれば，$SL(n, \boldsymbol{R})$ の x^0 における接平面の方程式は

$$\sum_{i=1}^{n} \det^{(i)}(x, x^0) = n \tag{18}$$

で与えられることがわかる．特に $x^0 = 1_n$ においては

$$\det^{(i)}(x, 1_n) = x_{ii}$$

であるから，(18) は

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \mathrm{tr}(x) = n \tag{19}$$

という簡単な形になる．（したがって $x^0 = 1_n$ における“接ベクトル” $X = x - x^0$ は $\mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(x) - \mathrm{tr}(1_n) = n - n = 0$ という条件をみたす．）

以上により $SL(n, \boldsymbol{R})$ は滑らかな超曲面であり，その各点は (n^2-1) 次元の ε-球と解析同相な近傍をもつことがわかった．

ここで序でに前節で述べた超曲面 $N: \det(x) = 0$ は“特異点”（接平面の作れない点）をもつことに注意しておこう．実際，$n = 2$ の場合についてみれば

$$\mathrm{grad}\,\det(x) = (x_{22}, -x_{21}, -x_{12}, x_{11})$$

であるから，$x = 0$ において $\mathrm{grad}\,\det(0) = 0$．一般に N は原点 O を頂点とする一つの“錐体”（cone）であるから，原点が一つの特異点になることは明白であろう．（そこでは接平面が存在しないというよりも，存在しすぎるというべきかもしれない．）

5. リー群とは

以上準備的な話が多かったが，この辺で一応まとめてみることにしよう．我々は $GL(n, \boldsymbol{R})$ や $SL(n, \boldsymbol{R})$ が群であると同時に，位相的にはその各点が（それぞれ n^2 次元，n^2-1 次元の）ユークリッド空間の中の近傍（例えば ε-球）と解析同相な近傍をもつことをみた．$O(n)$ についても同様のことがいえるのだが，それは次章にまわすことにしよう．また群の乗法は (1) で与

えられるのだから明らかに微分可能な（解析的な）写像であり，逆元をとる操作 $x \longmapsto x^{-1}$ も（$n=2$ の場合は (6) からわかるように）分母がゼロにならない有理関数によって与えられ，したがって微分可能である．一般に $GL(n, \boldsymbol{R})$ の部分群 G の各点がある次元のユークリッド空間の近傍と解析同相な近傍をもち，群の演算がこの解析構造に関して微分可能な写像になっているとき，Gを**行列のリー群**という．——なんだそんなことかといわれるかもしれないが，リー群とはもっとも普通な群であり，その「普通」ということを定式化したのがリー群なのである．

より抽象的には，各点がユークリッド空間の近傍と同相な近傍をもつような位相空間を（その解析構造を加えて）"解析多様体" といい，群であると同時に解析多様体であり群の演算が（その解析構造に関して）解析写像になっているようなものを "リー群" というのであるが，我々はそういう sophisticated な一般論はさけて，さし当り行列のリー群だけについて話を進めることにしよう．

第2章　リー群のリー環

前章で行列の群の例として $GL(n, \boldsymbol{R})$, $SL(n, \boldsymbol{R})$, $O(n)$ 等をあげた. $GL(n, \boldsymbol{R})$ は（実数を成分にもつ）n 次行列 $x=(x_{ij})$ で可逆なもの (i. e., x^{-1} が存在するもの，または $\det(x)\neq 0$ であるもの）全体の作る群，他の二つはそれぞれ

$$SL(n, \boldsymbol{R}) = \{\, x \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid \det(x) = 1 \,\},$$
$$O(n) = \{\, x \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid {}^t x x = 1_n \,\}$$

によって定義される $GL(n, \boldsymbol{R})$ の部分群であった. さらに位相的にみれば, $GL(n, \boldsymbol{R})$ は n 次行列全体の空間（それを n^2 次元ユークリッド空間とみなして $\boldsymbol{R}^{n^2}$ とかく）の中の開集合，$SL(n, \boldsymbol{R})$ は $\boldsymbol{R}^{n^2}$ において方程式 $\det(x) = 1$ によって定義される滑らかな（n^2-1 次元）超曲面であった.（“滑らか”とは各点で接超平面が存在することである.）そしてこのように群であると同時に滑らかな曲面状の構造をもつもの（むずかしくいえば“多様体”になっているもの）を一般に“リー群”というのであった. 標語的にいえば“リー群”とは接線の引ける群のことである.

さて行列のリー群について話を進めるためまずその一つの簡単ではあるが重要な性質について述べておこう.

1. 左乗法と右乗法

n 次の可逆な行列 $a \in GL(n, \boldsymbol{R})$ を一つ定め，a による乗法，すなわち任意の $x \in GL(n, \boldsymbol{R})$ に ax を対応させる操作を考える. これは $GL(n, \boldsymbol{R})$ を自分自身の中にうつす一つの写像である. それを λ_a とかく：

$$\lambda_a : x \longmapsto ax$$

(最近の数学では "一般元" の写像を示す矢印として特に $\longmapsto$ を使う.) 乗法といっても，群 $GL(n, \boldsymbol{R})$ は非可換だから，ax と xa とは区別しなければいけない．上記 λ_a を "左乗法" といい，もう一つの乗法

$$\mu_a : x \longmapsto xa$$

を右乗法という．

さて $a, b \in GL(n, \boldsymbol{R})$ とすれば，明らかに

(1) $$\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab}, \qquad \mu_a \circ \mu_b = \mu_{ba}$$

(ここに $\circ$ は写像の合成を表わす.) 実際，結合律により

$$(\lambda_a \circ \lambda_b)(x) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = a(bx) = (ab)x = \lambda_{ab}(x).$$

これがすべての $x \in GL(n, \boldsymbol{R})$ に対して成立するから，写像としての等式 $\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_{ab}$ を得る．同様に $\mu_a \circ \mu_b = \mu_{ba}$ を得る．(積の順序に注意！) また

(2) $$\lambda_a \circ \mu_b = \mu_b \circ \lambda_a$$

が成立する．これも結合律 $a(xb) = (ax)b$ のかきかえに過ぎない．(2) は左乗法と右乗法とが相互に可換であることを示している．(しかし $GL(n, \boldsymbol{R})$ は非可換だから $\lambda_a \circ \lambda_b = \lambda_b \circ \lambda_a$, $\mu_a \circ \mu_b = \mu_b \circ \mu_a$ 等は一般には成立しない.)

(1) において特に $b = a^{-1}$ とすれば，$aa^{-1} = 1_n$ から $\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_{1_n}$．また $a^{-1}a = 1_n$ から $\lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a = \lambda_{1_n}$ を得る．ここで

$$\lambda_{1_n} : x \longmapsto 1_n x = x$$

は $GL(n, \boldsymbol{R})$ の "恒等写像" (各元をそれ自身にうつす写像) である．我々は一般に集合 M の恒等写像を 1_M，または略して単に 1，とかくことにしよう．上記により

(3) $$\lambda_a \circ \lambda_{a^{-1}} = \lambda_{a^{-1}} \circ \lambda_a = 1_{GL(n, \boldsymbol{R})}$$

という関係が得られた．この式は λ_a が "逆写像" をもち，それが $\lambda_{a^{-1}}$ で与えられることを示している．すなわち，$(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$．このことから特に λ_a は $GL(n, \boldsymbol{R})$ をそれ自身の上に1対1にうつす写像であることがわかる．(最近の用語でいえば "全単射" である.) もちろん μ_a についても同じことがいえる．

左乗法（または右乗法）の一つの重要な性質はそれが全体として $GL(n, \boldsymbol{R})$ の上に“推移的”（transitive）に作用していることである．すなわち $GL(n, \boldsymbol{R})$ の任意の二つの元 x_1, x_2 に対して $\lambda_a(x_1) = x_2$ となるような元 a が必ず存在する．実際，$a = x_2 x_1^{-1}$ とおけばよい．（同様に $\mu_{a'}(x_1) = x_2$ となる元 a' は $a' = x_1^{-1} x_2$ で与えられる．）

以上述べたことは一般に任意の群について成立する事実である．しかし特に $GL(n, \boldsymbol{R})$ の場合を考えると，左乗法 λ_a は行列成分の一次写像によって与えられている．実際，$a = (a_{ij})$, $x = (x_{ij})$ とすれば

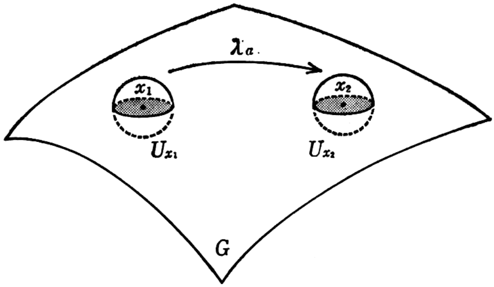
$$\lambda_a(x) = ax = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj}\right)$$

だから，$\lambda_a(x)$ の (i, j) 成分は x の成分の（斉）一次式である．したがってこの写像は連続であり，また（何回でも）微分可能であり，解析的でもある．（写像が“解析的”であるというのはその成分が収束する巾級数で与えられていることをいう．）しかも λ_a は逆写像をもち，その逆写像 $(\lambda_a)^{-1} = \lambda_{a^{-1}}$ も同じ性質をもっているから，λ_a は $GL(n, \boldsymbol{R})$ からそれ自身の上への“解析同型”を与えている．特に $\lambda_a(x_1) = x_2$ ならば，λ_a によって x_1 の近傍 U_{x_1} は x_2 の（適当な）近傍 U_{x_2} の上に1対1解析的に写像されているのである．

2. カルタンの定理

G を $GL(n, \boldsymbol{R})$ の一つの部分群としよう．$a \in G$ による左乗法 λ_a は明らかに G を G の上に1対1にうつす．（$x \in G$ なら $ax \in G$，また $y \in G$ に対し $a^{-1}y \in G$ で $a(a^{-1}y) = y$，しかも $ax = y \Longleftrightarrow x = a^{-1}y$ であるから．）そして G の元による左乗法は G の上に推移的に作用する．（$x_1, x_2 \in G$ なら，$a = x_2 x_1^{-1} \in G$ であるから．）よって上述の解析同相 $U_{x_1} \xrightarrow{\approx} U_{x_2}$ において，x_1 の近傍の G に含まれている部分 $G \cap U_{x_1}$（次図における U_{x_1} の陰影の部分）は x_2 の近傍の G に含まれている部分 $G \cap U_{x_2}$（U_{x_2} の陰影の部分）にうつされている．したがってこれらの部分の位相的，ないし解析的な

性質はまったく同じである．このことを G は**等質** (homogeneous) であるといい表わす．



今 G が $GL(n, \boldsymbol{R})$ の閉部分群（位相的に閉集合になっているような部分群）であって，G の一点 x_1 において $G\frown U_{x_1}$ が滑らかな曲面状になっていたと仮定すれば，上記の等質性により，他の任意の一点 $x_2\in G$ の近傍 $G\frown U_{x_2}$ においても同じ状態になっていることがわかる．したがって G 全体が滑らかな曲面状になっている．すなわち G がリー群であることが結論される．

実は上記の仮定は $GL(n, \boldsymbol{R})$ の（もっと一般に任意のリー群の）任意の閉部分群に対していつも成立し，したがってそれはリー群になることが知られている．

カルタン (Cartan) の定理：　リー群の閉部分群はリー群である．

ここではこの定理は証明なしに認めることにする．（証明については，例えば Chevalley [5], Ch. IV, §14, 参照）これは非常に一般的な定理であるが，我々が考えている例，$G=SL(n, \boldsymbol{R})$, $O(n)$ 等のように，$GL(n, \boldsymbol{R})$ の中でいくつかの代数方程式（多項式を $=0$ とおいた形の方程式）で定義されている群 G の場合，すなわちいわゆる“代数群”の場合には，はじめから G が代数多様体になっていることがわかっているので，上記の等質性によりこの定理はほとんど明らかである．我々は $G=O(n)$ の場合についてこれを実証してみよう．

3. $O(n)$ の場合

$O(n)$ は条件 ${}^t x\, x = 1_n$，すなわち方程式系

$$\sum_{k=1}^{n} x_{ki} x_{kj} = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \cdots, n)$$

によって定義された部分群である．この条件は i, j に関して対称だから，実際には $i \leqslant j$ として $\frac{1}{2} n(n+1)$ 個の方程式

$$\text{(4)} \qquad f_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} x_{ki} x_{kj} - \delta_{ij} = 0 \qquad (i \leqslant j)$$

だけで十分である．ここで偏導関数

$$\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{kl}} = \delta_{il} x_{kj} + \delta_{jl} x_{ki} \qquad (1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n,\ 1 \leqslant k, l \leqslant n)$$

を $((i, j), (k, l))$ 成分にもつ $\frac{n(n+1)}{2} \times n^2$ 型の行列 (Jacobian matrix) を考えよう．よく知られた陰関数の定理により，もしこの行列の適当な $\frac{1}{2} n \cdot (n+1)$ 次小行列式が 0 でなければ，その点で $O(n)$ に接平面が存在する．

簡単のため $n = 2$ の場合についてみれば，ヤコビ行列は

$$\frac{\partial(f_{11}, f_{12}, f_{22})}{\partial(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22})} = \begin{pmatrix} 2x_{11} & x_{12} & 0 \\ 0 & x_{11} & 2x_{12} \\ 2x_{21} & x_{22} & 0 \\ 0 & x_{21} & 2x_{22} \end{pmatrix}.$$

この第3行を除いて得られる3次の小行列式は

$$= 4x_{11}(x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21})$$

であるから，確かに $x = 1_2$ において 0 でない．よって 1_2 において接線が引ける．よって等質性により $O(2)$ はいたるところ滑らかな曲線（実は二つの円）である．

一般の n の場合にもこの方法で証明できるが，これはいわば一番下手なやり方である．それよりもこの場合次に述べるようなパラメーター表示（ケイレイ変換）を使うのが得策であろう．

今

$$X = c(x) = (1_n - x)(1_n + x)^{-1} \tag{5}$$

とおけば，これは $1_n + x$ が可逆 (i. e., $\det(1_n + x) \neq 0$) であるような x に対して定義された有理変換で

$$\begin{aligned} 1_n + X &= \{(1_n + x) + (1_n - x)\}(1_n + x)^{-1} \\ &= 2(1_n + x)^{-1}. \end{aligned}$$

よって $1_n + X$ も可逆であり，$2(1_n + X)^{-1} = 1_n + x$. よって

$$\begin{aligned} x &= 2(1_n + X)^{-1} - 1_n \\ &= \{2 \cdot 1_n - (1_n + X)\}(1_n + X)^{-1} \\ &= (1_n - X)(1_n + X)^{-1}, \end{aligned}$$

すなわち，$x = c(X)$. したがって $c : x \longmapsto X$ は $GL(n, \boldsymbol{R})$ から超曲面 $\det(1_n + x) = 0$ を除いた部分を $\boldsymbol{R}^{n^2}$ から二つの超曲面 $\det(1_n \pm X) = 0$ を除いた部分に（1対1に）うつす有理写像で，$c \circ c = 1$ という性質をもっている. これを**ケイレイ** (**Cayley**) **変換**という.

さて $X = c(x)$ のとき，$1_n + x$ と $1_n - x$ とが可換なことに注意して

$$\begin{aligned} {}^tX &= {}^t((1_n - x)(1_n + x)^{-1}) \\ &= {}^t((1_n + x)^{-1}(1_n - x)) \\ &= (1_n - {}^tx)(1_n + {}^tx)^{-1} = c({}^tx), \end{aligned}$$

また

$$\begin{aligned} -X &= (x - 1_n)(1_n + x)^{-1} \\ &= (1_n - x^{-1})xx^{-1}(1_n + x^{-1})^{-1} \\ &= (1_n - x^{-1})(1_n + x^{-1})^{-1} = c(x^{-1}). \end{aligned}$$

よって

$$x \in O(n) \iff {}^tx = x^{-1} \iff {}^tX = -X.$$

${}^tX = -X$ であるような行列を**交代行列**という. 交代行列 X の固有値は（容易にわかるように）純虚数であるから，$\det(1_n \pm X) \neq 0$ である. したがってケイレイ変換により $O(n)$ の開部分集合

$$U = O(n) - \{ x \in O(n) \mid \det(1_n + x) = 0 \}$$

が $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の線形部分空間

$$\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R}) = \{ X \in \boldsymbol{R}^{n^2} \mid {}^tX = -X \} \tag{6}$$

と解析同相になることがわかる．したがって $O(n)$ は 1_n において（したがっていたるところ）滑らかであり，リー群になることが結論される．しかもその次元は $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ のそれと同じく $\frac{1}{2}n(n-1)$ である．

4. リー群上の曲線

さてリー群とその接空間の性質をしらべるためには，リー群の上の曲線とその接ベクトルとをしらべてみるのが近道である．つまり（蟻が木の葉の上を歩き廻るように）リー群の上を実際に歩いてみようというわけである．

リー群 $GL(n,\boldsymbol{R})$ の中の“曲線”とは実直線 $\boldsymbol{R}$ 上のある閉区間 $[\alpha,\beta]$ から $GL(n,\boldsymbol{R})$ の中への連続写像

$$\boldsymbol{R} \ni t \longmapsto x(t) = (x_{ij}(t)) \in GL(n,\boldsymbol{R})$$

のことである．$x(t)$ が“連続”とはその行列成分 $x_{ij}(t)$ $(1 \leqslant i,j \leqslant n)$ がすべて t の連続関数であることをいう．我々はこの曲線の接線を考えたいのだから，$x_{ij}(t)$ は（必要なだけ）微分可能（また解析的）であると仮定しておく．そのとき $\alpha < t_0 < \beta$ における接ベクトルとは定義により

$$X = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=t_0} = \lim_{t\to t_0}(t-t_0)^{-1}(x(t)-x(t_0)) \tag{7}$$

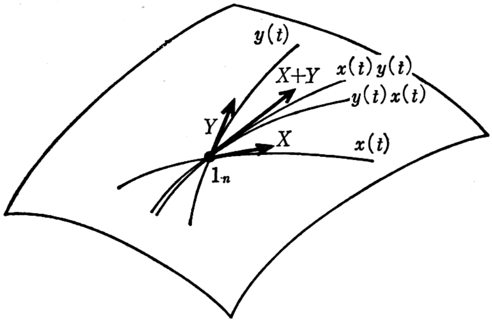
である．（ベクトルといっても X 自身やはり一つの行列である．その (i,j) 成分は $\left.\dfrac{dx_{ij}(t)}{dt}\right|_{t=t_0}$ で与えられる．）

以下，特に単位元 1_n を通る曲線の 1_n における接ベクトルを考えることにしよう．簡単のため区間 $[\alpha,\beta]$ は 0 を内点にもつ（すなわち $\alpha<0<\beta$）とし，$t=0$ が 1_n に対応しているものとする．したがって 1_n における $x(t)$ の接ベクトルは

$$X = \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \lim_{t\to 0} t^{-1}(x(t)-1_n)$$

である．

さて二つの曲線 $x(t)$, $y(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ が与えられ，その $t=0$ における接ベクトルがそれぞれ X, Y であったとする．そのとき積 $x(t)\cdot y(t)$ を作れば，これも 1_n を通る曲線でその 1_n における接ベクトルは $X+Y$ になる．



実際

$$t^{-1}(x(t)y(t)-1_n) = t^{-1}(x(t)-1_n)y(t)+t^{-1}(y(t)-1_n).$$

ここで $t\to 0$ のとき $y(t)\to y(0)=1_n$ であるから，この式全体は $X+Y$ に収束する．［この証明は“積の微分”の公式：$(f(t)g(t))'=f'(t)g(t)+f(t)g'(t)$ の証明を行列値関数 $x(t)$, $y(t)$ の場合に適用したものに過ぎない．］

この公式を特に $y(t)=x(t)^{-1}$ の場合に適用してみよう．$x(t)y(t)\equiv 1_n$ であるからその接ベクトルは0，したがって $X+Y=0$，すなわち $Y=-X$ を得る．［より一般に，任意の行列の曲線 $x(t)$ に対して

$$\frac{d}{dt}(x(t)^{-1}) = -x(t)^{-1}\frac{dx(t)}{dt}x(t)^{-1} \tag{8}$$

が成立する．これも周知の公式 $\frac{d}{dt}(f(t)^{-1}) = -f'(t)/f(t)^2$ の拡張である．行列は非可換だから，二つの $x(t)^{-1}$ をまとめて $x(t)^{-2}$ とするわけにはいかない！］

さて曲線 $x(t)$ $(x(0)=1_n)$ に対し，${}^t x(t)$（左肩の t は転置行列の記号）も同じく 1_n を通る曲線で，明らかに

$$\left.\frac{d\,{}^t x(t)}{dt}\right|_{t=0} = {}^t\!\left(\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}\right) = {}^t X$$

である．よって $x(t)$ が直交群 $O(n)$ に含まれる曲線ならば，${}^t x(t)=x(t)^{-1}$ から，その接ベクトルについて ${}^t X=-X$，すなわち X が交代行列であることがいえる．したがって $O(n)$ の 1_n における接ベクトル全体の作る線形空間（“接ベクトル空間”）は $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ に含まれる．いいかえれば $O(n)$ の

1_n における接空間 (i. e., 1_n を始点とする接ベクトルの終点の集合) は $1_n+\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ に含まれる．しかし次元が一致しているから，これらの空間は実際一致する．

今 $X\in\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ に対し tX のケイレイ変換によって定義される曲線 $x(t)=c(tX)=(1_n+tX)(1_n-tX)^{-1}$ を考えれば，十分小さい t に対して

$$x(t)=(1_n+tX)\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}(tX)^{\nu}$$
$$=1_n+2\sum_{\nu=1}^{\infty}t^{\nu}X^{\nu}.$$

よって明らかに $\left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=2X$. これからも，任意の交代行列 X が実際 $O(n)$ の中の曲線の接ベクトルになっていることがわかる．

一般に $GL(n,\boldsymbol{R})$ の閉部分群 G (それはカルタンの定理によりリー群である) の単位元 1_n における接ベクトル空間を対応するドイツ文字 $\mathfrak{g}$ で表わす．したがってリー群 $GL(n,\boldsymbol{R})$, $SL(n,\boldsymbol{R})$, $O(n)$ に対応する接ベクトル空間もそれぞれ $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$, $\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})$, $\mathfrak{o}(n)$ で表わされる．今まで述べたことを総合すれば

$$\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})=\boldsymbol{R}^{n^2}\qquad(n\text{ 次実行列の全体}),$$
$$\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})\mid \mathrm{tr}(X)=0\},$$
$$\mathfrak{o}(n)=\{X\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})\mid {}^tX+X=0\}=\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R}).$$

5. 行列のリー環

さて上記の $\mathfrak{g}$ はベクトル空間である以上に一つの特別な構造をもっている．その結果を (賢明な読者はすでに気付かれているかもしれないが) ズバリいってしまえば

(9)
$$X,Y\in\mathfrak{g}\Longrightarrow XY-YX\in\mathfrak{g}$$

となることである．上の三つの例でこれをためすのは易しい．まず $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ については自明．$\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})$ については，$X=(x_{ij})$, $Y=(y_{ij})\in\mathfrak{sl}(n,\boldsymbol{R})$ とすれば

(10)
$$\mathrm{tr}(XY)=\sum_{i,j=1}^{n}x_{ij}y_{ji}=\mathrm{tr}(YX)$$

であるから

$$\mathrm{tr}(XY-YX) = \mathrm{tr}(XY)-\mathrm{tr}(YX) = 0,$$

よって $XY-YX \in \mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$. (これは任意の $X, Y \in \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ についても成立する.) 次に $X, Y \in \mathfrak{o}(n)$ とすれば, ${}^tX = -X$, ${}^tY = -Y$ から

$$\begin{aligned}{}^t(XY-YX) &= {}^tY{}^tX-{}^tX{}^tY \\ &= (-Y)(-X)-(-X)(-Y) \\ &= -(XY-YX).\end{aligned}$$

よって $XY-YX \in \mathfrak{o}(n)$.

一般に二つの行列 X, Y に対し, $XY-YX$ を $[X, Y]$ で表わし, これを普通 X, Y の "カッコ積" (bracket product) という. 我々は (もう少し日本語らしく) **交代積**と呼ぶことにしよう.

(9) を一般に証明するために, 今 X, Y に対応する G 内の (1_n を通る微分可能な) 曲線 $x(t)$, $y(t)$ をとる. 上述のように $x(t)y(t)$ も $y(t)x(t)$ もともに $X+Y$ を 1_n における接ベクトルとしてもつ. すなわち第1次近似である接ベクトルだけを見ていたのでは G の非可換性は現われてこない. 交代積 $[X, Y] = XY-YX$ はいわば非可換性を測る尺度なのだから, それを捉えるためにはどうしても第2次近似まで行かなければならない.

そこで $x(t)$, $y(t)$ をともに2回以上連続的微分可能とし $x(t)$ のテイラー展開を

$$x(t) = 1_n+tX+\frac{t^2}{2}X^{(2)}+\cdots\cdots \tag{11}$$

とする. $X^{(2)} = \left.\dfrac{d^2x(t)}{dt^2}\right|_{t=0}$, また $\cdots\cdots$ のところは t について2次より高次の無限小を表わす. 同様に

$$y(t) = 1_n+tY+\frac{t^2}{2}Y^{(2)}+\cdots\cdots$$

としよう. そのとき

$$\begin{cases} x(t)y(t) = 1_n+t(X+Y)+\dfrac{t^2}{2}(X^{(2)}+2XY+Y^{(2)})+\cdots\cdots, \\ y(t)x(t) = 1_n+t(X+Y)+\dfrac{t^2}{2}(X^{(2)}+2YX+Y^{(2)})+\cdots\cdots. \end{cases} \tag{12}$$

[“賢明な” 読者はライプニッツの公式 $(f(t)g(t))'' = f''(t)g(t)+2f'(t)g'(t)+f(t)g''(t)$ を思い出されたにちがいない.] ここで t の2次の項の係数は確かに相異なり，その差がちょうど $[X, Y] = XY-YX$ である：

$$x(t)y(t)-y(t)x(t) = t^2[X, Y]+\cdots\cdots.$$

実際に $[X, Y]$ を接ベクトルとしてもつ曲線を作るため，まず (12) において $y(t) = x(t)^{-1}$ とすれば，$x(t)y(t) \equiv 1_n$ から

$$X+Y = 0, \qquad X^{(2)}+2XY+Y^{(2)} = 0.$$

よって $Y = -X$, $Y^{(2)} = 2X^2-X^{(2)}$，すなわち

$$x(t)^{-1} = 1_n-tX+\frac{t^2}{2}(2X^2-X^{(2)})+\cdots\cdots. \tag{13}$$

よって (12) の第2式から

$$(y(t)x(t))^{-1} = 1_n-t(X+Y)$$
$$+\frac{t^2}{2}\{2(X+Y)^2-(X^{(2)}+2YX+Y^{(2)})\}+\cdots\cdots.$$

したがって

$$(x(t)y(t))(y(t)x(t))^{-1} = x(t)y(t)x(t)^{-1}y(t)^{-1}$$
$$= 1_n+\frac{t^2}{2}\{(X^{(2)}+2XY+Y^{(2)})-2(X+Y)^2$$
$$+2(X+Y)^2-(X^{(2)}+2YX+Y^{(2)})\}+\cdots\cdots$$
$$= 1_n+t^2[X, Y]+\cdots\cdots.$$

よって $z(t) = x(\sqrt{|t|})y(\sqrt{|t|})x(\sqrt{|t|})^{-1}y(\sqrt{|t|})^{-1}$ とおけば，$z(t)$ は G の中の曲線で $t=0$ においても微分可能であり，その接ベクトルがちょうど $[X, Y]$ になる.

このようにベクトル空間であり，同時に条件 (9) をみたすもの，すなわち交代積に関して閉じているものを一般に（行列の）**リー環**という．上記により $GL(n, \boldsymbol{R})$ の任意の閉部分群 G に対して一つのリー環 $\mathfrak{g}$ が対応していることがわかった．次章からこのリー環の性質，およびリー群とリー環との対応についてもう少し精しく考えてみることにしよう.

第3章　ワン・パラメーター部分群と指数関数

1. リー環の定義

前章の復習から始めよう．G を $GL(n, \boldsymbol{R})$ の任意の閉部分群とすれば，G はリー群になり（カルタンの定理），したがっていたるところ接空間が存在する．特に単位元 1_n における“接ベクトル空間”（1_n を通る G 上の曲線の 1_n における接ベクトル全体の集合）を $\mathfrak{g}$ とすれば，$\mathfrak{g}$ はベクトル空間であるばかりでなく

$$X, Y \in \mathfrak{g} \Longrightarrow [X, Y] = XY - YX \in \mathfrak{g}$$

という性質をもっている．この交代積 $[X, Y]$ を一種の乗法とみて $\mathfrak{g}$ を“リー環”というのであった．

さて定義から明らかに

(1) $$[X, X] = X^2 - X^2 = 0,$$

(2) $$[X, Y] = -[Y, X].$$

（これが“交代積”という理由である．）さらに $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]] &= X(YZ-ZY)-(YZ-ZY)X \\ &= XYZ+ZYX-XZY-YZX.\end{aligned}$$

したがって X, Y, Z を cyclic に入れかえて加えたものは0になる：

$$\begin{aligned}&[X, [Y, Z]]+[Y, [Z, X]]+[Z, [X, Y]] \\ &= XYZ+ZYX-XZY-YZX \\ &\quad +YZX+XZY-YXZ-ZXY \\ &\quad +ZXY+YXZ-ZYX-XYZ = 0.\end{aligned}$$

すなわち

(3)
$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

これを**ヤコービ（Jacobi）の恒等式**という．

この他に

(4)
$$\begin{cases} [X_1 + X_2, Y] = [X_1, Y] + [X_2, Y], \\ [cX, Y] = c[X, Y] \qquad (c \in \boldsymbol{R}) \end{cases}$$

という性質があることは明らかであろう．これは一種の分配法則と結合法則であるが，まとめていえば，Y を固定したとき，写像 $X \longmapsto [X, Y]$ が線形であることに他ならない．第2因子 Y についても同様のことがいえる．これをまとめて，写像

$$(X, Y) \longmapsto [X, Y]$$

は“双一次的”(bilinear) であるといい表わす．

より抽象的に，一つの（有限次元）ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ に条件 (1)～(4) をみたすような積 $[X, Y]$ が定義されているとき，$\mathfrak{g}$ を**リー環**という．一つのリー環 $\mathfrak{g}$ の部分集合 $\mathfrak{g}'$ が線形部分空間であり，かつ演算 $[X, Y]$ に関して閉じている ($X, Y \in \mathfrak{g}' \Longrightarrow [X, Y] \in \mathfrak{g}'$) ならば，$\mathfrak{g}'$ 自身も一つのリー環になる．これを**部分リー環**という．我々の例では $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})\,(= M_n(\boldsymbol{R}))$ が一つのリー環であり，$\mathfrak{sl}(n, \boldsymbol{R})$, $\mathfrak{o}(n)\,(= \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R}))$ 等はその部分リー環である．前章で述べたことの要点は，$GL(n, \boldsymbol{R})$ の任意の閉部分群 G に対してその 1_n における接ベクトル空間 $\mathfrak{g}$ を考えれば，それが $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ の部分リー環になるということであった．

2. リー群とリー環の対応

リー群 G からリー環 $\mathfrak{g}$ への対応について簡単な性質をあげておこう．まず $\mathfrak{g}$ は G の単位元における接ベクトル空間なのだから，当然

(5)
$$\dim \mathfrak{g} = \dim G$$

である．また G_1, G_2 を $GL(n, \boldsymbol{R})$ の二つの閉部分群，$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ をそのリー環とすれば

(6)
$$G_1 \subset G_2 \Longrightarrow \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_2$$

であることも明らかであろう．

ここで自然に一つの疑問が起ってくる．それは上記の対応の逆は可能であろうか？　すなわち，$\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ の任意の部分リー環 $\mathfrak{g}$ に対してそれをリー環にもつような $GL(n, \boldsymbol{R})$ の部分リー群 G が存在するだろうか，存在するとしてそれは一意的に決まるだろうか，という疑問である．その答は（大雑把にいえば）Yes であり，それが**リー（Lie）の基本定理**の一つである．しかしそれを正確に述べることはそう簡単ではない．以下順を追ってその概略を説明してゆこう．

余談になるが，現代数学ではこのように二つの違った種類の数学的対象の間に対応関係がつくことが非常に大きな意味をもっている．読者の多くは"ガロア理論"について聞かれたことがあると思う．それは代数体と群との間の対応関係であって，それによって代数学の多くの重要な定理（"一般の5次方程式が巾根では解けない"というアーベルの定理や，角の三等分が作図不可能であること等）の明快な証明が得られるのである．今我々が問題にしているリー群とリー環の対応もこれにおとらぬ重要なことで，これによってリー群の解析的ないしは幾何学的な性質の多くが対応するリー環の純代数的性質に翻訳され，逆にリー環に関する代数的な定理を証明するのにリー群の位相的性質を利用することもできる．リー群とリー環とはちょうど車の両輪のように，相互のその理論展開を支えているのである．

3. ワン・パラメーター部分群

一つの n 次行列 $A \in \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$, $A \neq 0$ をとる．上の等式（1）からわかるように，A が生成する1次元ベクトル空間 $\{\lambda A\,(\lambda \in \boldsymbol{R})\}$（それを $\{A\}_{\boldsymbol{R}}$ とかく）は確かに $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ の一つの部分リー環である．これはいわば一番簡単なリー環である．もし上に述べたようなリー群とリー環との対応が成立するものならば，この $\mathfrak{g} = \{A\}_{\boldsymbol{R}}$ に対して対応するリー群 G が存在しなければならない．それを求めてみよう．

まず位相的にいえば，Gは1次元だから一つの曲線である．したがって一

つのパラメーター t によって $x(t)$ とかける．前回と同じように

$$(7)\qquad x(0)=1_n,\qquad \left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0}=A$$

と仮定しても一般性を失わない．次に $x(t)$ は部分群であるから積 $x(t)x(t')$ は $x(t'')$ の形になる． ここで $t''=\varphi(t,t')$ とおけば，φ は（二変数 t,t' の）解析関数である：

$$(8)\qquad x(t)x(t')=x(\varphi(t,t')).$$

（正確にいえば，t'' が t,t' によって必ずしも一意的に定まらない場合もある．しかし t,t' を0の十分小さい近傍に制限すれば，そこで定義された一価解析関数 φ があって (8) が成立する．）この関数 φ はもちろん任意ではなく，$x(t)$ が群であることに対応していくつかの条件をみたす．例えば結合律

$$(x(t_1)x(t_2))x(t_3)=x(t_1)(x(t_2)x(t_3))$$

を (8) によってかき直せば

$$(9)\qquad \varphi(\varphi(t_1,t_2),t_3)=\varphi(t_1,\varphi(t_2,t_3))$$

という条件が得られる．また $x(0)=1_n$ が単位元であることから

$$(10)\qquad \varphi(t,0)=\varphi(0,t)=t$$

という条件もみたされねばならない．このような φ は，無数に存在するが，その中で一番簡単なものは

$$\varphi_0(t,t')=t+t'$$

である．そこでまずこの φ_0 に対して (8) が成立するような，すなわち

$$(11)\qquad x(t)x(t')=x(t+t')$$

であるような曲線 $x(t)$ が作れないかどうかを考えてみる．

さて (7), (11) をみたす $x(t)$ があれば

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt}&=\lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}(x(t+t')-x(t))\\&=\lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}(x(t)x(t')-x(t))\\&=x(t)\cdot\lim_{t'\to 0}\frac{1}{t'}(x(t')-1_n)\end{aligned}$$

$$= x(t)\cdot A.$$

よって $A=(a_{ij})$ とすれば $x(t)=(x_{ij}(t))$ は定数係数の線形微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\cdot A, \tag{12}$$

あるいは成分でかいて

$$\frac{dx_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}x_{ik}(t) \qquad (i,j=1,\cdots,n)$$

をみたす．よく知られているように，初期条件 (7) の下にこの微分方程式は一意的に解ける．その解を仮に $x(t,A)$ とかくことにしよう．

この解 $x(t,A)$ は果して (11) をみたすかどうか？　すなわち

$$x(t,A)x(t',A) = x(t+t',A) \tag{11A}$$

が成立するか？　それをみるために t を固定し，この式の両辺を t' に関して（偏）微分すれば

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t'}(x(t,A)x(t',A)) &= x(t,A)\cdot\frac{d}{dt'}x(t',A)\\ &= x(t,A)\cdot x(t',A)\cdot A,\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}x(t+t',A) = x(t+t',A)\cdot A.$$

よってそれぞれ t' に関して (12) と同じ微分方程式をみたしている．しかも $t'=0$ においては

$$x(t,A)x(0,A) = x(t,A) = x(t+0,A),$$

すなわち初期条件も一致している．よってこの二つの解は一致する．すなわち (11A) が成立する！

同様に，解の一意性から，任意の $c\neq 0$ に対し

$$x(ct,A) = x(t,cA)$$

が成立することも証明できる．

以上で，1次元リー環 $\{A\}_{\boldsymbol{R}}$ に対し（少くとも一つ）1次元のリー群 $\{x(t,A)\ (t\in\boldsymbol{R})\}$ が対応することがわかった．（もっとも，$\{x(t,A)\}$ の位相についてはもう少し考える必要がある．それは後に述べる．）このリー

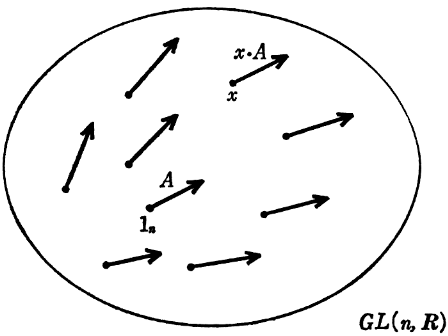
群を**ワン・パラメーター（部分）群**という．

4. ベクトル場の積分曲線

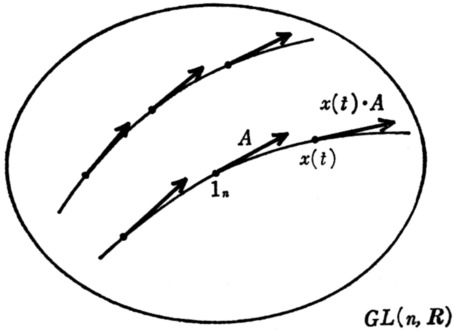
$x(t, A)$ のみたす微分方程式

(12)
$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t)\cdot A$$

の幾何学的意味を考えてみよう．今 $GL(n, \boldsymbol{R})$ の各点 x にベクトル（といっても行列だが）$x\cdot A$ を対応させてみる．このように空間の各点に一つずつベクトルが対応させられているとき，その全体（対応）を“ベクトル場”という．



そこで (12) をみれば，この式は曲線 $x(t) = x(t, A)$ の各点における接ベクトル $dx(t)/dt$ がちょうどその点に与えられたベクトル $x(t)\cdot A$ と一致していることを示している．このように一つのベクトル場が与えられたとき，各点でそれに接するような曲線をその“積分曲線”という．前節で述べたことは要するに，上記のベクトル場 $\{x\cdot A \ (x \in GL(n, \boldsymbol{R}))\}$ に対し，ワン・パラメーター群 $\{x(t, A) \ (t \in \boldsymbol{R})\}$ は単位元 1_n を通る一つの積分曲線であり，それは微分方程式 (12) の解として一意的に定まるということである．
(一般に任意の解析的なベクトル場に対して解析的な積分曲線の族が定まる．ニュートン流にいえば，各点での“速度ベクトル” fluxion を与えることにより流体の“流れ” flux が定まるのである．)



ついでに前に述べた一般の φ に対する $x(t)$ について考えてみよう．この曲線については (12) は一般に成立しない．しかし $G=\{x(t)\ (t\in \boldsymbol{R})\}$ は部分群なのだから，前章で説明した“等質性”により，1_n の近傍は $x(t)$ の近傍に左乗法 $\lambda_{x(t)}$ によって解析的にうつされているはずである．したがって $x(t)$ における接線は 1_n における接線

$$\{1_n+cA\ (c\in \boldsymbol{R})\}\quad (\text{それを } 1_n+\{A\}_{\boldsymbol{R}} \text{ とかく})$$

を $\lambda_{x(t)}$ でうつしたもの

$$\{x(t)+cx(t)\cdot A\ (c\in \boldsymbol{R})\}\quad (\text{それを } x(t)+\{x(t)A\}_{\boldsymbol{R}} \text{ とかく})$$

に一致するはずである．したがって $x(t)$ における接ベクトルそのものは $x(t)\cdot A$ のあるスカラー倍であり，$c(t)x(t)A$ とかける．($c(t)$ は t に関係するスカラーである.) よって $x(t)$ は微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt}=c(t)x(t)A \tag{13}$$

をみたす．$c(t)$ は $t(\in \boldsymbol{R})$ の連続関数であり，$c(t)\neq 0$, $c(0)=1$ であるから，すべての t に対して $c(t)>0$ である（中間値の定理）.

このことから曲線 $x(t)$ は実は $x(t, A)$ から変数変換で得られることがわかる．実際

$$\begin{cases} \phi(t)=\displaystyle\int_0^t c(t)dt, \\ x(t)=x(\phi(t), A) \end{cases} \tag{14}$$

とおけば，ϕ は単調増大な関数で偏微分の連鎖律により

$$x'(t) = \psi'(t)x'(\psi(t), A)$$
$$= c(t)x(\psi(t), A)A$$
$$= c(t)x(t)A,$$

よってこの $x(t)$ は (13) をみたす．しかも

$$x(0) = x(\psi(0), A) = x(0, A) = 1_n,$$
$$x'(0) = c(0)x(0)A = A$$

であるから初期条件 (7) もみたされている．よって解の一意性からこれが唯一つの解である．したがって二つの曲線 $\{x(t)\}$ と $\{x(t, A)\}$ とはパラメーターのとり方が違うだけで，曲線としてはまったく同じものである．これでリー環 $\mathfrak{g} = \{A\}_R$ に対応するリー群 $G = \{x(t)\}$ の“一意性”が証明された．

このことを3で述べた φ についていいかえれば，条件 (9), (10) 等をみたす解析関数 φ は標準的な $\varphi_0(t, t') = t+t'$ から変数変換によって得られるもの，すなわち

(15)
$$\varphi(t, t') = \psi^{-1}(\psi(t)+\psi(t'))$$

の形にかけるもので尽くされることがわかる．(このことは巾級数に関する代数的な議論から導くこともできる.)

5．指数関数

さて (12) の解 $x(t, A)$ は具体的にどんな関数だろうか．読者は微分方程式 (12) が，指数関数 $f(t) = e^{at}$ のみたす微分方程式

$$f'(t) = af(t)$$

と非常によく似ている，というよりそっくり同じ (ただ定数 a が行列 A でおきかわっているだけ) であることに気づかれていると思う．したがってその解 $x(t, A)$ を“行列の指数関数”と考えるのはごく自然である．実際それは指数関数と同じ (行列の) 巾級数で表わされる．

今 (12) の両辺を t について微分すれば

$$x''(t, A) = x'(t, A)\cdot A = x(t, A)\cdot A^2.$$

一般に $x(t,A)$ の（t に関する）ν 次導関数は

$$x^{(\nu)}(t,A)=x(t,A)A^{\nu}$$

で与えられることが，ν に関する帰納法で示される．この式で $t=0$ とおけば

$$x^{(\nu)}(0,A)=A^{\nu}.$$

したがって $x(t,A)$ の（t に関する）テイラー展開は形式的には

$$x(t,A)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{t^{\nu}}{\nu!}A^{\nu} \tag{16}$$

となり，指数関数の巾級数展開とまったく同じである．

(16) を確立するためには右辺の収束を確かめなければならない．$t=1$ とおいて，行列の無限級数

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}A^{\nu}=1_n+A+\frac{1}{2}A^2+\cdots\cdots \tag{17}$$

を考えよう．$A=(a_{ij})$, $|a_{ij}|\leqslant M$ $(i,j=1,\cdots,n)$ とする．A^{ν} の (i,j) 成分を $a_{ij}{}^{(\nu)}$ とかくことにすれば

$$|a_{ij}{}^{(2)}|=|\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{kj}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||a_{kj}|\leqslant nM^2,$$

$$|a_{ij}{}^{(3)}|=|\sum_{k=1}^{\infty}a_{ik}a_{kj}{}^{(2)}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}||a_{kj}{}^{(2)}|\leqslant n^2M^3.$$

一般に帰納法により

$$|a_{ij}{}^{(\nu)}|\leqslant n^{\nu-1}M^{\nu}. \tag{18}$$

よって

$$\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{\nu!}|a_{ij}{}^{(\nu)}|\leqslant\sum_{\nu=1}^{N}\frac{1}{\nu!}n^{\nu-1}M^{\nu}$$

$$\leqslant\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu!}n^{\nu-1}M^{\nu}=\frac{1}{n}(e^{nM}-1).$$

よって各 (i,j) に対して無限級数 $\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{\nu!}a_{ij}{}^{(\nu)}$ は絶対収束する．したがって，行列の級数の収束の定義により，(17) の級数は（絶対）収束する．その“和”を $\exp A$ とかき，（行列から行列への）関数 $A\longmapsto\exp A$ を**行列の指数関数**というのである．

上記により (16) の右辺の級数も任意の t, A に対して（絶対）収束し，その和は $\exp(tA)$ である．よってよく知られた解析の定理により $x(t, A)$ は $\exp(tA)$ に一致する：

$$x(t, A) = \exp(tA). \tag{19}$$

二つの行列 A, B が可換（$[A, B]=0$）ならば，通常の指数関数の時とまったく同様に

$$\exp A\cdot\exp B = \exp(A+B) \tag{20}$$

が証明される．[特に tA と $t'A$ は可換だから

$$\exp(tA)\cdot\exp(t'A) = \exp(t+t')A,$$

また $\exp(0A) = \exp 0 = 1_n$．これらは $\exp(tA)$ がワン・パラメーター群の条件 (7), (11) をみたしていることを示す．このことからも $x(t, A) = \exp(tA)$ が結論される．]

6．指数関数の例

指数関数についてはまだいろいろとかきたいことがあるのだが，それは次章以下にまわすことにし，いくつか具体的な例をあげて，読者の研究にゆだねることにする．

例 1.　$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix}$,　$\exp(tA) = \begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\alpha_2 t} \end{pmatrix}$.

例 2. A を“対称行列”（${}^tA = A$）とすれば $\exp tA$ は正値対称行列になる．（しかも指数関数 $A \longmapsto \exp A$ は対称行列全体の空間 $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ から正値対称行列全体の集合 $\mathcal{P}_n(\boldsymbol{R})$ の上への全単射を与える[†]．）

例 3.　$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,　$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,　$A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,　……

†）第8章，補題1参照．

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1-\frac{t^2}{2}+\cdots, & -t+\frac{t^3}{3!}-\cdots \\ t-\frac{t^3}{3!}+\cdots, & 1-\frac{t^2}{2}+\cdots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

これは“回転”の行列である．一般に A が交代行列 $({}^tA = -A)$ ならば，$\exp(tA)$ は直交行列である．すなわち $\exp(tA)$ は直交群 $O(n)$ の中のワン・パラメーター部分群になる．

例 4.　$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,　$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,　$A^3 = 0$,　……

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A は“巾零行列”(nilpotent matrix) である．一般に巾零行列 A $(A^n = 0)$ に対し，$x = \exp A$ とおけば

$$x-1_n = A+\frac{1}{2}A^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}A^{n-1}$$

も巾零である．$x-1_n$ が巾零のとき x を“unipotent”という(“巾単”と訳すこともある)．指数関数 $A \longmapsto x = \exp A$ は巾零行列全体の集合から unipotent 行列全体の集合への全単射を与える．逆写像は“対数関数”

$$A = (x-1_n)-\frac{1}{2}(x-1_n)^2+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n-1}(x-1_n)^{n-1}$$

で与えられる．この場合は指数関数も対数関数もともに多項式になってしまうから収束の問題は起らない．(ここに述べたことはより一般的な理論の特別な場合であるが，行列論の手頃な練習問題でもある．腕に自信のある読者は自分で証明してみられるとよい．)—— 一口に指数関数といっても行列の場合その内容は実に多様である．

第4章　リー群の位相
（ワン・パラメーター群の分類）

1. 局所から大局へ

前章では $GL(n, \boldsymbol{R})$ の一番簡単な，しかし最も基本的な部分群，ワン・パラメーター群について述べた．その要点は，n 次実行列 $A(\neq 0)$ によって生成された1次元ベクトル空間 $\{A\}_{\boldsymbol{R}}$ を，行列のリー環 $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ の部分リー環とみなしたとき，行列群 $GL(n, \boldsymbol{R})$ の1次元のリー部分群で，そのリー環がちょうど $\{A\}_{\boldsymbol{R}}$ になるようなものがただ一つ存在する．それは定数係数の線形微分方程式

$$\text{(1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)\cdot A, \\ x(0) = 1_n \end{cases}$$

（ただし $x(t) = (x_{ij}(t))$ は $\boldsymbol{R}$ から $GL(n, \boldsymbol{R})$ の中への関数）の解によって $\{\, x(t)\ (t \in \boldsymbol{R})\,\}$ とかける．さらに $x(t)$ は具体的には（いたるところ収束する）行列の巾級数

$$\text{(2)} \qquad x(t) = \exp(tA) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} A^\nu$$

によって与えられるのであった．なお，方程式 (1) の第一式を

$$\text{(1')} \qquad \frac{dx(t)}{dt} = A\cdot x(t)$$

でおきかえても（第二式 $x(0) = 1_n$ を仮定すれば）解は同じであることに注意しておく．（前章の議論をこの方程式についてくり返してみればわかる．）

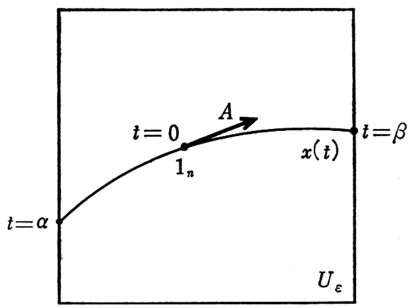
さてこの解 $x(t) = \exp(tA)$ についてもう少し補足しておきたいことがある．それは次の点である．いま単位元 1_n における一つの接ベクトル A を

与えると，ちょうどそれを接ベクトルとするワン・パラメーター群 $\{x(t)\}$ が存在するといったのだが，その“存在”という言葉の意味をもう少しはっきりさせる必要がある．まず 1_n の（十分小さい）近傍，例えば

$$U_\varepsilon = \{\, x = (x_{ij}) \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid \|x - 1_n\| < \varepsilon \,\} \tag{3}$$

を考える．ただし，行列 $x=(x_{ij})$ に対して $\|x\| = \operatorname*{Max}_{i,j} |x_{ij}|$ とおく．したがって上記 U_ε は 1_n を中心とする，一辺の長さ 2ε の n^2 次元方体である．ε を十分小さくとれば，U_ε の中での (1) の解が，ある $\alpha<0$, $\beta>0$ に対し，

$$x(t) = \exp(tA) \qquad (\alpha < t < \beta)$$



で与えられることは，微分方程式の解の存在定理によって保証されている．さらに (2) の巾級数はすべての t に対して収束するから，この解は t の正の方向にも負の方向にもいくらでも延長することができる．しかし t の大きい値に対する $\exp(tA)$ がどういう状態になっているかは，微分方程式の解の“局所的”(local) な議論だけからはわからない．そのためにはどうしても“大局的”(global) な位相群論的考察が必要になってくる．そこでまずトポロジーのいくつかの術語——といっても恐らくは読者がよく御存知の——を用意しておくことにしよう．それは“連結”と“コンパクト”の二つである．

2. コンパクト性

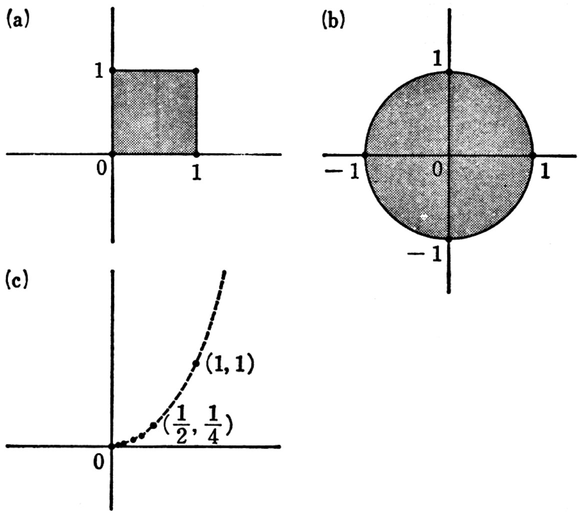
まずコンパクトの説明から始めよう．M をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の部分集合とする．M が有界な閉集合であるとき**コンパクト**であるという．例え

ば

(a)
$$M=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$$
（周もこめた正方形の内部）

(b)
$$M=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$$
（周もこめた円の内部）

(c)
$$M=\left\{\left(\frac{1}{\nu},\ \frac{1}{\nu^2}\right)\middle|\ \nu=1,2,\cdots\right\}\cup\{(0,0)\}$$
（放物線上の点列とその集積点）



などは皆コンパクトである．ここで“有界”という条件と“閉集合”という条件とが互に独立であることを認識することが大切である．例えば（開いた）円の内部

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

は有界であるが閉集合ではない（したがってコンパクトではない）．一方角領域

$$\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}$$

は閉集合であるが有界ではない（したがってコンパクトではない）．直線も

閉集合であるがコンパクトではない．

我々が考えているリー群 $SL(n, \boldsymbol{R})$, $O(n)$ 等はいずれも $GL(n, \boldsymbol{R})$ の中の閉集合であるが，$SL(n, \boldsymbol{R})$ は有界でない（したがって コンパクトではない）．実際，$SL(n, \boldsymbol{R})$ の部分集合

$$\left\{\begin{pmatrix} \lambda & & & & 0 \\ & \lambda^{-1} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\lambda > 0)\right\}$$

は明らかに 有界でない．（図形的には これは双曲線の半分である．上の行列は $t = \log \lambda$ とおけば

$$\exp(tA), \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & -1 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}$$

とかけるから，この集合は一つのワン・パラメーター部分群になっている．）一方，直交群 $O(n)$ はコンパクトである．実際，$x = (x_{ij}) \in O(n)$ とすれば，${}^t x \cdot x = 1_n$ であるから，任意の i に対し

$$\sum_{j=1}^{n} {x_{ij}}^2 = 1,$$

したがって $|x_{ij}| \leqslant 1$．よって $O(n)$ は有界（したがってコンパクト）である．

コンパクト集合についていくつか基本的性質をあげれば

（i） M をコンパクト，M_1 を M の閉部分集合とすれば，M_1 もコンパクトである．（これは明白．）

（ii） M をコンパクト，$f: M \longrightarrow \boldsymbol{R}^{N'}$ を 連続写像 とすれば，その像 $f(M)\,(\subset \boldsymbol{R}^{N'})$ もコンパクトである．

(iii) $\boldsymbol{R}^N$ の部分集合 M がコンパクトであるためには，M に含まれる任意の点列 $\{x_\nu\}$ が必ず（M の中の点に）収束する部分点列 $\{x_{\nu_k}\}$ をもつことが必要十分である．

(ii) は (iii) から出る．また (ii), (iii) から，特別の場合として，コンパ

クト集合 M 上の実数値連続関数が必ず最大値と最小値をとるというワイエルシュトラスの定理が得られることなど周知であろう．

(iii) はコンパクト集合を intrinsic に（それ自身の中で）特徴づける性質である．（これに反して我々が定義に使った有界，閉というような性質はユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の中での性質であり，相対的なものである．）そこで抽象的には位相空間 M が性質 (iii) をもつとき"コンパクト"と定義するのである．

3. 連結性

次に連結の説明をしよう．（$\boldsymbol{R}^N$ の中の）集合 M が**連結**であるとは，M を二つの互に共通点のない（空でない）相対的閉集合 M_1, M_2 の和集合に分解することができないことをいう．ここで M_i が M の"相対的閉部分集合"であるというのは，M 自身を位相空間とみなしたとき，M_i がその中で閉集合になっていること，すなわち M_i の中の点列 $\{x_\nu\}$ が M の点 x_0 に収束するならば，$x_0 \in M_i$ であることをいう．（相対的）閉集合の（相対的）補集合は（相対的）開集合だから，上記の連結性の条件の中で"閉集合"という言葉を"開集合"という言葉でおきかえてもまったく同じことである．

2 であげた例の中 (a)（正方形）や (b)（円）は連結である（ことが証明できる）．しかし (c) の M は連結ではない．例えば

$$M_1 = \{(1,1)\}, \qquad M_2 = \left\{\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu^2}\right) \middle| \nu = 2, 3, \cdots\right\} \cup \{(0,0)\}$$

とおけば，$M = M_1 \cup M_2$ と相対閉集合の和に分解される．リー群の例では $M = O(n)$ は連結でない．実際，第1章に述べたように

$$M_1 = SO(n), \qquad M_2 = \{\, x \in O(n) \mid \det(x) = -1 \,\}$$

とおけば，M_1, M_2 はともに（$GL(n, \boldsymbol{R})$ の中の，したがって $O(n)$ の中でも相対的）閉集合で

$$M = M_1 \cup M_2, \qquad M_1 \cap M_2 = \phi \quad \text{（空集合）},$$

したがって $O(n)$ は連結でない．

$SL(n, \boldsymbol{R})$, $SO(n)$ 等は連結であるが，このことについては後に述べることにしよう（第8章，補題2の後の系2と (18)）.

連結集合の性質として **2** の (i) に相等するものはない．しかし (ii) に類似の性質：

(ii′) M を連結，$f: M \longrightarrow \boldsymbol{R}^{N'}$ を連続写像とすれば，その像 $f(M)$ も連結である．

は定義から直ちに得られる．

実直線 $\boldsymbol{R}$ 上の閉区間 $[\alpha, \beta]$ は（実数の連続性により）コンパクトかつ連結である．またこの逆，すなわち $\boldsymbol{R}$ のコンパクトな連結部分集合は閉区間に限ることもいえる．以下一つの練習問題としてこれを証明してみよう．（定義を理解する一番よい方法はそれを使ってみることである．）

M を $\boldsymbol{R}$ に含まれるコンパクトな連結部分集合とし，

$$\alpha = \mathrm{Inf}\{\, x \in M \,\}, \qquad \beta = \mathrm{Sup}\{\, x \in M \,\}$$

とおく．（Inf は“下限”すなわち最大下界，Sup は“上限”すなわち最小上界を表わす．）M は有界であるから α, β はともに有限である（$\pm\infty$ ではない）．M は閉集合であるから，$\alpha, \beta \in M$．そこで $M = [\alpha, \beta]$ であることを示す．そのためには $\alpha < \xi < \beta$, $\xi \notin M$ であるような ξ が存在するとして矛盾を出せばよい．そのような ξ があるとして

$$\alpha_1 = \mathrm{Inf}\{\, x \in M \mid \xi < x \,\}, \qquad \beta_1 = \mathrm{Sup}\{\, x \in M \mid x < \xi \,\}$$

とおく．明らかに $\alpha \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1 \leqslant \beta$ であるが，M が閉集合だから $\alpha_1, \beta_1 \in M$．よって $\alpha_1 < \xi < \beta_1$．そこで

$$M_1 = M \frown [\alpha, \beta_1], \qquad M_2 = M \frown [\alpha_1, \beta]$$

とおけば，M_1, M_2 はともに閉集合で

$$M = M_1 \smile M_2, \qquad M_1 \frown M_2 = \phi$$

となり M の連結性に反する．以上．

これと上記 (ii), (ii′) からコンパクトな連結集合の上の連続関数の値の集合は一つの閉区間になることがわかる．（“中間値の定理”の拡張！）

4. ワン・パラメーター群の分類

さてはじめの問題にかえって，一つのワン・パラメーター群

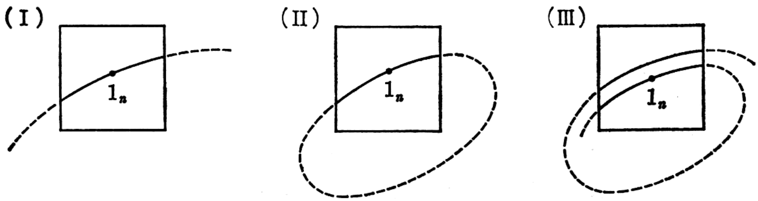
$$x(t)=\exp(tA) \qquad (t\in \boldsymbol{R})$$

を考える．（ただし，$A\neq 0$ とする．）今 $\alpha<t<\beta$ ならば $x(t)\in U_\varepsilon$（すなわち，$\|x(t)-1_n\|<\varepsilon$），$t=\alpha$ または $t=\beta$ ならば，$x(t)$ はこの近傍の境界に属する（すなわち，$\|x(t)-1_n\|=\varepsilon$）とする． $x(t)$ を $t>\beta$ の方向に延長していったとき，次の三つの場合が考えられる．

（I）$x(t)$ $(t>\beta)$ はもう決してこの近傍に含まれることはない．

（II）ある $t>\beta$ に対して $x(t)=1_n$ となる．

（III）ある $t>\beta$ に対して $x(t)\in U_\varepsilon$ である．しかし $x(t)=1_n$ となることはない．



地球（1_n）から飛びたったロケットが（I）の場合には宇宙の“かなた”に消えてしまう．しかし（II），（III）の場合にはある重力の作用によってまた地球の“そば”に舞い戻ってくる．ちょうどお釈迦様の不思議な力から逃げられない孫悟空のようなものである．しかし正確にもとの出発点に戻る場合（II）と，その近くまではくるが決してもとの点には戻れない場合（III）とがあるのである．

5. 第一の場合（直線型）

まず（I）の場合ワン・パラメーター群 $H=\{x(t)\}$ が閉じていることを証明しよう．この場合，上記の ε,β に対して

$$x(t)\in U_\varepsilon,\ t>0 \iff 0<t<\beta \tag{4}$$

である．行列の演算 $(x,y)\longmapsto x^{-1}y$ が連続であることから，さらにある

$\delta > 0$ があって

$$\|x-1_n\| < \delta,\ \|y-1_n\| < \delta \implies \|x^{-1}y-1_n\| < \varepsilon,$$

いいかえれば

$$(5) \qquad x, y \in U_\delta \implies x^{-1}y \in U_\varepsilon$$

である（ε-δ-論法！）. 今，x_0 を H の集積点とすればある実数の列 $\{t_\nu\}$ があって，$\lim_{\nu\to\infty} x(t_\nu) = x_0$. H が閉集合であることをいうためには $x_0 \in H$ をいえばよい. さて，

$$\{ x \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid \|x_0{}^{-1}x-1_n\| < \delta \} = \{ x_0 y \mid y \in U_\delta \}$$

（それを x_0U_δ とかく）

は x_0 の一つの近傍であるから，十分大きい ν に対して $x(t_\nu)$ は x_0U_δ に含まれる. すなわち，ある ν_0 があって

$$(6) \qquad \nu \geqslant \nu_0 \implies x(t_\nu) \in x_0U_\delta.$$

そこで $x(t_\nu) = x_0 y_\nu$, $y_\nu \in U_\delta$ とかけば，(5), (6) から，$\nu, \nu' \geqslant \nu_0$ に対して

$$x(t_\nu - t_{\nu'}) = x(t_{\nu'})^{-1}x(t_\nu) = y_{\nu'}{}^{-1}y_\nu \in U_\varepsilon,$$

よって (4) により $|t_\nu - t_{\nu'}| < \beta$. 特に

$$t_\nu < t_{\nu_0} + \beta \qquad (\nu \geqslant \nu_0),$$

したがって $\{t_\nu\}$ は上に有界である. $\lim x(-t_\nu) = x_0{}^{-1}$ であるから同じ論法により $\{-t_\nu\}$ も上に有界，したがって $\{t_\nu\}$ は下に有界である. よって $\{t_\nu\}$ は収束する部分列 $\{t_{\nu_k}\}$ を含む（閉区間のコンパクト性）. $\lim_{k\to\infty} t_{\nu_k} = t_0$ とすれば $\lim_{k\to\infty} x(t_{\nu_k}) = x(t_0)$. よって $x_0 = x(t_0)$. これで $x_0 \in H$ が証明された.

この場合，ワン・パラメーター群 $H = \{x(t)\}$ は（代数的にも位相的にも）実直線 $\boldsymbol{R}$ と同型になることが証明される（次章）から，**直線型**ということにしよう. この場合に属する例を少しあげる.

例 1. $A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & & \alpha_n \end{pmatrix}$ $(\alpha_i \neq 0)$.

この場合

(7)
$$x(t)=\exp(tA)=\begin{pmatrix} e^{\alpha_1 t} & & & 0 \\ & e^{\alpha_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\alpha_n t} \end{pmatrix}.$$

$0<\varepsilon<1$ とすれば

$$x(t)\in U_\varepsilon \iff 1-\varepsilon<e^{\alpha_i t}<1+\varepsilon \qquad (i=1,\cdots,n)$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha_i}\log(1-\varepsilon)<t<\dfrac{1}{\alpha_i}\log(1+\varepsilon) & (\alpha_i>0) \\ \dfrac{1}{\alpha_i}\log(1+\varepsilon)<t<\dfrac{1}{\alpha_i}\log(1-\varepsilon) & (\alpha_i<0). \end{cases}$$

よって

$$\alpha=\operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{\alpha_i}\log(1-\varepsilon\,\mathrm{sign}(\alpha_i))$$

$$\beta=\operatorname*{Min}_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{1}{\alpha_i}\log(1+\varepsilon\,\mathrm{sign}(\alpha_i))$$

とおけば，(4) が成立する．

任意の実対称行列は（直交行列によって）対角化可能だから，より一般に，実対称行列 $A\neq 0$ に対する $\exp(tA)$ は“直線型”である．

例 2.
$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & 0 \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

この場合

(8)
$$x(t)=\exp(tA)$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & t & \dfrac{t^2}{2} & \cdots & \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \dfrac{t^2}{2} \cdots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \dfrac{t^2}{2} \\ & & & \ddots & t \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$x(t) \in U_\varepsilon \iff \frac{|t|^k}{k!} < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\iff |t| < \operatorname*{Min}_{1 \leqslant k \leqslant n-1} (k!\varepsilon)^{1/k}.$$

よって $\beta = \operatorname*{Min}_{1 \leqslant k \leqslant n-1} (k!\varepsilon)^{1/k}$ とおけば，やはり（4）が成立する．

任意の巾零行列 A はこの形の行列の直和（いわゆる“ジョルダンの標準形”）に共役であるから，任意の（0でない）巾零行列 A に対しても $\exp(tA)$ は直線型である．

6. 第二の場合（トーラス型）

次に（II）の場合であるが，このときにはある $t > 0$ があって $x(t) = 1_n$ となる．そこで

(9)
$$N = \{ t \in \boldsymbol{R} \mid x(t) = 1_n \}$$

とおいてみる．容易にわかるように N は（加群）$\boldsymbol{R}$ の部分群であり，また一点 $\{1_n\}$（それは閉集合！）の連続写像 $x(t)$ に関する逆像だから閉じている．（群論的にいえば，N は準同型写像 $t \longmapsto x(t)$ の核である．）仮定により $N \neq \{0\}$ である．そこでまず，ある $t_0 > 0$ があって

(10)
$$N = \{ mt_0 \mid m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \}$$

となることを証明しよう．

$$N_+ = \{ t \in N \mid t > 0 \}$$

とおく．4 の α, β のとり方から

(11)
$$t \in N,\ \alpha < t < \beta \implies t = 0$$

であるから，実数 t に対して

$$t \in N_+ \iff x(t) = 1_n,\ t \geqslant \beta,$$

したがって N_+ も閉じている．$t_0 = \operatorname{Inf} N_+$ とおけば，$t_0 \in N_+$ で，t_0 は N_+ の最小元である．任意の実数 t に対し，“ユークリッド方式”により

(12)
$$t = mt_0 + t', \qquad 0 \leqslant t' < t_0$$

となるような整数 m が（一意的に）定まる．このとき

(13)
$$x(t) = x(t_0)^m x(t') = x(t').$$

特に $t \in N$ とすれば，$x(t) = x(t') = 1_n$ であるから t' も $\in N$ である．$t' \neq 0$ なら，$t' \in N_+$ で $t' < t_0$ となり t_0 のとり方に反する．よって $t' = 0$ である．これで (10) が証明された．

我々は (9) によって定義された閉部分群 N に対して (10) を証明したのだが，実はもっと一般に実数の加群 $\boldsymbol{R}$ の“真の”（すなわち $\{0\}$ でも $\boldsymbol{R}$ でもない）閉部分群は (10) の形のものに限ることが次のようにして証明できる．（これはもちろんカルタンの定理の特別な場合であるが，直接証明もカンタンである．）

N を $\boldsymbol{R}$ の真の閉部分群とする．上記により (11) をみたす α, β が存在することをいえばよい．もしそのような α, β がなければ

(14)
$$t_\nu \in N, \qquad t_1 > t_2 > \cdots\cdots, \qquad \lim_{\nu\to\infty} t_\nu = 0$$

となるような数列 $\{t_\nu\}$ が存在する．任意の実数 ξ に対して，ユークリッド方式により

$$\xi = m_\nu t_\nu + \xi_\nu', \qquad 0 \leqslant \xi_\nu' < t_\nu$$

となるような整数 m_ν をとれば，$\lim t_\nu = 0$ から，$\lim \xi_\nu' = 0$，したがって $\lim\limits_{\nu\to\infty} m_\nu t_\nu = \xi$．$N$ は閉部分群だから $m_\nu t_\nu \in N$，したがって $\xi \in N$．よって $N = \boldsymbol{R}$ となってしまう．これは矛盾である．

さてもとの問題にもどり，$H = \{x(t)\}$ を（II）の型のワン・パラメーター群とすれば，(12), (13) により

$$H = \{\, x(t) \mid 0 \leqslant t \leqslant t_0 \,\},$$

したがって H は閉区間 $[0, t_0]$ の連続写像 $x(t)$ による像である．閉区間はコンパクトだから，H もコンパクトである．実際，H は位相的には閉区間 $[0, t_0]$ の両端を一致させて得られる円周と同相である．リー群としての円周を普通“トーラス”(torus) というから，我々はこの型のワン・パラメーター群を**トーラス型**（または**コンパクト型**）と呼ぶことにしよう．群論的にいえば，この場合 $H \cong \boldsymbol{R}/N$．(10) により $N \cong \boldsymbol{Z}$（整数の加群）であるから，$H \cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ となる．（精しくは次章，定理2による．）

前章の終りにあげた例 3：$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ の場合，

$$x(t)=\exp(tA)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}. \tag{15}$$

よって

$$N=\{\,2\pi m\ (m\in \boldsymbol{Z})\,\}$$

となる．$x(t)$ の行列をその第 1 列に射影して考えれば，その像は文字通り一つの円周になっている．

もう少し複雑な例として

例 3. $A=\begin{pmatrix}0 & -\alpha_1 & 0 & 0\\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2\\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0\end{pmatrix}$ $(\alpha_1, \alpha_2>0)$

の場合を考えてみよう．

$$\begin{aligned} x(t)&=\exp(tA) \\ &=\begin{pmatrix}\cos\alpha_1 t & -\sin\alpha_1 t & 0 & 0\\ \sin\alpha_1 t & \cos\alpha_1 t & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cos\alpha_2 t & -\sin\alpha_2 t\\ 0 & 0 & \sin\alpha_2 t & \cos\alpha_2 t\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{16}$$

したがって

$$\begin{aligned} x(t)=1_n &\iff 2\pi|\alpha_1 t,\ 2\pi|\alpha_2 t \\ &\iff \frac{2\pi}{\alpha_1}\bigg| t,\ \frac{2\pi}{\alpha_2}\bigg| t \qquad (*)\end{aligned}$$

（ただし $x|y$ は整数論の記号で，$\dfrac{y}{x}$ が整数であることを示す）．ここでもし α_1, α_2 の比が有理数ならば，$\dfrac{2\pi}{\alpha_1}, \dfrac{2\pi}{\alpha_2}$ は"最小公倍数"をもつ．実際

$$\alpha_1:\alpha_2=m_1:m_2, \qquad \frac{\alpha_1}{m_1}=\frac{\alpha_2}{m_2}=\alpha_0$$

とし，m_1, m_2 の（普通の意味の）最大公約数を m_0 とする．$m_i = m_i' m_0$ とおけば，$\alpha_i = m_i' m_0 \alpha_0$．ここで，$m_1', m_2'$ は互に素だから，上記最後の条件（＊）が成立するためには $\left.\dfrac{2\pi}{m_0\alpha_0}\right| t$ が必要十分である．すなわち $\dfrac{2\pi}{m_0\alpha_0}$ が最小公倍数である．よってこの場合 $t_0 = \dfrac{2\pi}{m_0\alpha_0}$ とおけば（10）が成立する．

この例で $\alpha_1 : \alpha_2$ が無理数ならばどうなるだろうか？　その場合（10）が成立するような $t_0\,(>0)$ は存在せず，$N = \{0\}$ となる．これは（III）の場合であり，H は閉じておらず，H の閉包（H を含む最小の閉集合）は2次元のトーラス

$$H' = \left\{\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 t_1 & -\sin\alpha_1 t_1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_1 t_1 & \cos\alpha_1 t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_2 t_2 & -\sin\alpha_2 t_2 \\ 0 & 0 & \sin\alpha_2 t_2 & \cos\alpha_2 t_2 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \in \boldsymbol{R})\right\}$$

になることが証明される．これが実は一番おもしろい場合なのであるが，精細は（リー群の位相に関する他の話とともに）次章にまわすことにしよう．

第5章　閉じていないワン・パラメーター群

1．第三の場合

前章では行列群 $GL(n, \boldsymbol{R})$ のワン・パラメーター部分群 $x(t)=\exp(tA)$（A は 0 でない n 次行列，exp は行列の指数関数を表わす）に三つの型があることを説明した．n 次行列の空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の中の 1_n を中心とする“2ε-方体”を

$$U_\varepsilon = \{\, x \in \boldsymbol{R}^{n^2} \mid \| x - 1_n \| < \varepsilon \,\}$$

とかくとき

$$(1) \qquad \alpha < t < \beta \Longrightarrow x(t) \in U_\varepsilon \qquad (x(\alpha), x(\beta) \in \partial U_\varepsilon)$$

となるような $\alpha<0$, $\beta>0$, $\varepsilon>0$ が存在する．（∂U_ε は U_ε の“境界”を表わす.）第一型（I）とは (1) で逆の $\Longleftarrow$ も成立する，すなわち

$$(1') \qquad \alpha < t < \beta \Longleftrightarrow x(t) \in U_\varepsilon$$

となる場合である.（これを“直線型”と呼んだ.）第二型（II）はある $t_0>0$ があって

$$(2) \qquad x(t) = 0 \Longleftrightarrow t = mt_0,\ m \in \boldsymbol{Z}$$

となる場合である.（これを“トーラス型”と呼んだ.）この場合には

$$(3) \qquad x(t) \in U_\varepsilon \Longleftrightarrow \text{ある } m \in \boldsymbol{Z} \text{ に対し，} \alpha + mt_0 < t < \beta + mt_0$$

である．今，$H=\{\, x(t)\ (t \in \boldsymbol{R}) \,\}$ とおけば，（I），（II）の場合 H は $GL(n, \boldsymbol{R})$ の閉部分群になることを（前章で）証明した．［そして（I）の場合には $H \cong \boldsymbol{R}$,（II）の場合には $H \cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ となる．これは後述の定理2からの帰結である.］

今回は残った場合（III）について考えることにしよう．（III）は（I）で

も（II）でもない場合，正確にいえば，どんな $\alpha, \beta, \varepsilon$ をとっても（I），（II）型にならない場合である．我々はまず上記の逆："H が閉部分群ならば（ある $\alpha, \beta, \varepsilon$ に対して）（I）または（II）型になる" ことを証明しよう．定義から明らかなように

$$(4)\qquad H \cap U_\varepsilon \subset \{\, x(t) \mid \alpha < t < \beta \,\}$$

が成立すれば，H は（ある $\alpha', \beta', \varepsilon'$ に対して）（I）または（II）型になる．よって上の命題を証明するためには，H が閉じていれば (4) が成立することをいえば十分である．そのための準備としてまた一つトポロジーの定理を説明しよう．

2. ベールの定理：塵は積っても山にならない

M をユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の部分集合とする．$\boldsymbol{R}^N$ はユークリッドの距離

$$|x-y| = \left(\sum_{i=1}^{N} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$$

をもつから，それによって "ε-球"

$$U(a, \varepsilon) = \{\, x \in \boldsymbol{R}^N \mid |x-a| < \varepsilon \,\}$$

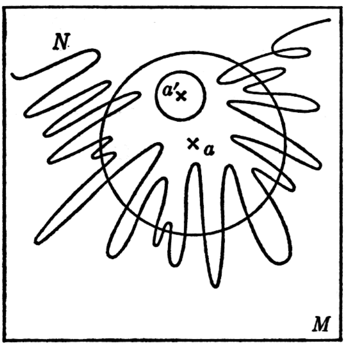
が定義され，それを a の近傍系として位相（すなわち開集合，閉集合，点列の収束等の概念）が入ることは周知の通りである．（ユークリッド距離のかわりに $\|x-y\| = \operatorname*{Max}_{1 \leqslant i \leqslant N} |x_i - y_i|$ をとり，したがって ε-球のかわりに 2ε-方体を近傍系としてもまったく同じ位相が定義される．我々は行きがかり上その両方を混用する．）M は $\boldsymbol{R}^N$ の位相から誘導された位相（"相対位相"）をもち，$a \in M$ の（相対）近傍系は $\{ U(a, \varepsilon) \cap M \}$ で与えられる．特に M の各点 a に対して十分小さい ε をとれば $\overline{U(a, \varepsilon)} \cap M$ が（$\boldsymbol{R}^N$ において）閉集合，したがってコンパクトになっているとき，M は**局所コンパクト** (locally compact) であるという．ここで $\overline{U(a, \varepsilon)}$ は $U(a, \varepsilon)$ の（$\boldsymbol{R}^N$ における）"閉包" すなわち閉じた ε-球 $\{\, x \in \boldsymbol{R}^N \mid |x-a| \leqslant \varepsilon \,\}$ を表わす．M の部分集合 N は $\overline{N} \cap M \subset N$ のとき，すなわち N の点列 $\{a_\nu\}$ が M の点

a に収束するならば，実は $a \in N$ であるとき，M の中で**相対的に閉じている**という．M が局所コンパクトならば，その相対的閉部分集合 N も局所コンパクトである．

M の部分集合 N に対し $\bar{N} \supset M$ が成立するとき，すなわち M の任意の点が N のある点列の極限になっているとき，N は M の中で**稠密** (dense) であるという．例えば有理数の集合 $\boldsymbol{Q}$ は実数の集合 $\boldsymbol{R}$ (それを 1 次元ユークリッド空間とみる) の中で稠密である．この場合 $\boldsymbol{Q}$ の $\boldsymbol{R}$ における補集合 $\boldsymbol{R}-\boldsymbol{Q}$, すなわち無理数の集合，も $\boldsymbol{R}$ の中で稠密である．

上記と反対に，$\overline{M-\bar{N}} \supset M$ のとき，すなわち N の閉包の補集合 $M-\bar{N}$ が M の中で稠密になるとき，N は M において**疎** (nowhere dense) であるという．定義により，N が M において疎ならば，M の任意の点 a を中心とする任意の ε-球 $U(a, \varepsilon)$ に対し，$U(a, \varepsilon) \cap (M-\bar{N}) \neq \phi$, すなわちある $a' \in U(a, \varepsilon)$ があって，$a' \notin \bar{N}$. したがって十分小さい $\varepsilon' > 0$ をとれば

(5) $$U(a', \varepsilon') \subset U(a, \varepsilon), \qquad U(a', \varepsilon') \cap N = \phi$$



となる．これは定義のいいかえに過ぎないが，便宜上補題として述べておく．

補題 1. $M \subset \boldsymbol{R}^N$ とする．M の部分集合 N が M において疎であるためには，任意の $a \in M$, $\varepsilon > 0$ に対し，ある $a' \in M$, $\varepsilon' > 0$ があり (5) が成立することが必要十分である．

ε' をさらに小さくとることにより，(5) の第一式を

$$\overline{U(a', \varepsilon')} \subset U(a, \varepsilon)$$

でおきかえてもよいことは明らかであろう.

整数の集合 $\boldsymbol{Z}$ は $\boldsymbol{R}$ の中で疎である. もう少し気のきいた例として, $M=[0,1]=\{t\in\boldsymbol{R}\mid 0\leqslant t\leqslant 1\}$, N を $[0,1]$ に含まれる実数で, いくつかの決った数字, 例えば 3, 6, 9 を使わずに十進表示できるもの全体の集合とすれば, N は M の中の（コンパクトな）疎集合である.

（実験的証明）$a=\sqrt{2}-1=0.4142\cdots$, $\varepsilon=0.1$ とする. $U(a,\varepsilon)$ は開区間 $(0.3142\cdots, 0.5142\cdots)$ である. そこで $a'=0.33$, $\varepsilon'=0.01$ とおけば, 開区間 $U(a',\varepsilon')=(0.32,\ 0.34)$ は確かに $U(a,\varepsilon)$ に含まれる. そして $U(a',\varepsilon')$ の数を十進展開すれば必ず（小数点以下第1位に）3が現われる, したがって (5) が成立する！

さて次の定理を証明しよう.

定理 1. M を $\boldsymbol{R}^N$ の空でない部分集合とすれば, 次の二つの条件が同時にみたされることはありえない.

（i）M は局所コンパクトである.

（ii）M の疎な部分集合の列 $N_\nu\ (\nu=1,2,\cdots)$ で, $M=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}N_\nu$ となるものが存在する.

証明. (i), (ii) が同時に成立すると仮定して矛盾を導く. この仮定の下に, M の点列 $a_1, a_2, \cdots$ と正数の列 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$ を次のように帰納的にえらぶ. まず $a_1\in M$, $\varepsilon_1>0$ を

$$\begin{cases} \overline{U(a_1,\varepsilon_1)}\cap M \text{ がコンパクト,} \\ U(a_1,\varepsilon_1)\cap N_1=\phi \end{cases}$$

であるようにとる. M が局所コンパクト, N_1 が M の中で疎であるから, これは可能である. 今, $a_1,\cdots,a_{\nu-1}$ と $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{\nu-1}$ とがすでにえらばれたとする. 補題1により $a_\nu\in M$, $\varepsilon_\nu>0$ を

$$\begin{cases} \overline{U(a_\nu,\varepsilon_\nu)}\subset U(a_{\nu-1},\varepsilon_{\nu-1}), \\ U(a_\nu,\varepsilon_\nu)\cap N_\nu=\phi \end{cases}$$

となるようにとることができる. このようにして無限列 $\{a_\nu\}$, $\{\varepsilon_\nu\}$ をえらび, $U_\nu=U(a_\nu,\varepsilon_\nu)$ とおけば

(6)
$$\bar{U}_\nu \subset U_{\nu-1}, \qquad U_\nu \cap N_\nu = \phi$$

が成立する．点列 $\{a_\nu\}$ はコンパクト集合 $\bar{U}_1 \cap M$ に含まれているから，その中で収束する部分列 $\{a_{\nu_k}\}$ をえらぶことができる．

$$\lim_{k\to\infty} a_{\nu_k} = a_0 \in \bar{U}_1 \cap M$$

とする．$k' > k$ ならば，$a_{\nu_{k'}} \in U_{\nu_{k'}} \subset \bar{U}_{\nu_k+1} \subset U_{\nu_k}$ であるから，$a_0 \in U_{\nu_k}$．これがすべての k に対して成立するから，$a_0 \in \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{\nu_k}$．任意の ν に対し，ある k があって $\nu_k \geqq \nu$ であるから，$a_0 \in U_{\nu_k} \subset U_\nu$．よって $a_0 \notin N_\nu$．したがって $a_0 \notin \bigcup_{\nu=1}^{\infty} N_\nu = M$．これは矛盾である．（証終）

あまり適切な比喩ではないが，局所コンパクトな M を“山”に，その中の疎集合を“ちり”にたとえれば，“ちり”が可算個積っても決して“山”にはならないというのが定理の内容である．もう少し一般に“空でない完備な距離空間はその中の疎集合の可算個の和にはならない”ということが，（上と同様にして）証明できる．これが**ベール（Baire）の定理**である．

3. 閉じたワン・パラメーター部分群

定理1の応用として1に述べたことを次の形で証明しよう．

定理 2. ワン・パラメーター群 $H = \{x(t)\ (t \in \boldsymbol{R})\}$ が $GL(n, \boldsymbol{R})$ の中で閉じていれば，任意の $\alpha < \beta$ に対して

$$\{x(t) \mid \alpha < t < \beta\}$$

は H の（相対的）開集合である．

証明. H が $GL(n, \boldsymbol{R})$ の閉部分群ならば，H は局所コンパクトである．一方，任意の $\delta > 0$ に対し，$\boldsymbol{R}$ は $[\alpha-\delta, \alpha+\delta]$ の形の閉区間の可算個の和に表わされる：

$$\boldsymbol{R} = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} [\alpha_\nu - \delta,\ \alpha_\nu + \delta].$$

（例えば，$\{\alpha_\nu\}$ として $\{0, \delta, -\delta, 2\delta, -2\delta, \cdots\cdots\}$ をとればよい．）したがって

$$H = x(\boldsymbol{R}) = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} x([\alpha_\nu - \delta, \alpha_\nu + \delta]).$$

$N_\nu = x([\alpha_\nu - \delta,\ \alpha_\nu + \delta]) = \{x(t) \mid |t - \alpha_\nu| \leqq \delta\}$ とおけば，

$$H=\bigcup_{\nu=1}^{\infty}N_\nu.$$

したがって定理1により N_ν の中に疎でないものがある．今 N_{ν_0} が（H の中で）疎でないとすれば

$$N_{\nu_0}=x(\alpha_{\nu_0}+[-\delta,\delta])$$
$$=x(\alpha_{\nu_0})\cdot x([-\delta,\delta])$$

であり，左乗法 $h\longmapsto x(\alpha_{\nu_0})\cdot h$ は H の自己同型を与える（H の等質性）から，$x([-\delta,\delta])$ も疎ではない．閉区間 $[-\delta,\delta]$ はコンパクト，したがって $x([-\delta,\delta])$ もコンパクトであるから，それが（H の中で）疎でないとは，$H-x([-\delta,\delta])$ が（H の中で）稠密でないことを意味する．すなわち，ある $t_1\in\boldsymbol{R}$ があり，$x(t_1)$ の（H における）ある近傍が $x([-\delta,\delta])$ に含まれる，いいかえれば $x(t_1)$ は（H の位相に関して）$x([-\delta,\delta])$ の“内点”である．よってある $\varepsilon_1>0$ があり，$V_1=U_{\varepsilon_1}\cap H$ とおけば

$$x(t_1)\cdot V_1\subset x([-\delta,\delta]).$$

よって

$$V_1^{-1}V_1\subset x([-\delta,\delta])x([-\delta,\delta])$$
$$\subset x([-2\delta,2\delta]).$$

$V_1^{-1}V_1$ は 1_n の（H における）一つの近傍であるから，上式は 1_n が $x([-2\delta,2\delta])$ の“内点”であることを示している．

さて，$\alpha<\beta$ を任意にとる．$\alpha<t<\beta$ とし，$\delta>0$ を

$$\delta<\frac{1}{2}(t-\alpha),\qquad \delta<\frac{1}{2}(\beta-t)$$

であるようにとれば，上記により 1_n は（H の位相に関し）

$$x([-2\delta,2\delta])\subset x((\alpha-t,\beta-t))=x(t)^{-1}\cdot x((\alpha,\beta))$$

の内点である．（ここに (α,β) は開区間 $\{t'\in\boldsymbol{R}\mid\alpha<t'<\beta\}$ を表わす．）よって再び H の等質性により，$x(t)$ が $x((\alpha,\beta))$ の内点であることが結論される．$x((\alpha,\beta))$ の任意の点がその内点になるのだから $x((\alpha,\beta))$ は（H における）開集合である．（証終）

定理2は写像 $t\longmapsto x(t)$ が“開写像”（開集合を開集合にうつす写像）で

あることを主張する．上の論法を少し一般化すれば，“G, G' が第二可算公理をみたす局所コンパクトな位相群であるとき，G から G' の上への連続準同型 φ は開写像である，（したがって特に φ が全単射ならば，φ は位相同型を与える）”という定理が得られる．これは位相群論において非常に有用な定理である．

［なおやや細い議論になるが，定理2から，閉じたワン・パラメーター群 $H=\{x(t)\ (t\in \boldsymbol{R})\}$ のパラメーター表示は本質的に一つしかない（t を $t=\alpha t'$, $\alpha\neq 0$, でおきかえて得られるものしかない）ことも導かれる．これはリー群の解析構造がその位相群としての構造だけから定まるという定理の特別な場合である．］

4. 閉じていないワン・パラメーター部分群

例によって前置きが長くなってしまったが，以上により H が閉じていれば（I），（II）型のいずれかであることが確定した．さらに（定理2によって）（I）型ならば $H\cong \boldsymbol{R}$,（II）型ならば $H\cong \boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ である．（ここに $\cong$ は位相群の同型を表わす．）したがってワン・パラメーター群 H は位相的に次のように分類される：

$$
\begin{cases}
H\text{ が閉部分群}\begin{cases}\text{コンパクトの場合}\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{II})\text{型}\\ \text{コンパクトでない場合}\cdots\cdots(\text{I})\text{型}\end{cases}\\
H\text{ が閉じていない場合}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(\text{III})\text{型}
\end{cases}
$$

さて前章で述べた例：

$$
A=\begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \qquad (\alpha_1, \alpha_2 > 0)
$$

の場合を考えてみよう．

$$
x(t)=\exp(tA)
$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 t & -\sin\alpha_1 t & 0 & 0 \\ \sin\alpha_1 t & \cos\alpha_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_2 t & -\sin\alpha_2 t \\ 0 & 0 & \sin\alpha_2 t & \cos\alpha_2 t \end{pmatrix}$$

は直交行列である．[これはもちろん行列の形から明らかであるが，一般に X が交代行列：${}^tX = -X$ ならば，${}^t(\exp X) = \exp({}^tX) = \exp(-X) = (\exp X)^{-1}$，すなわち $\exp X$ は直交行列である．また $\det(\exp X) = \exp(\mathrm{tr}(X)) = 1$ となることも，例えば X を標準形に直すことにより，証明される．] したがって $H \subset SO(4)$ である．

H の（$GL(4, \boldsymbol{R})$ における）閉包 $\bar{H}$ を考えれば，明らかにこれも部分群で，$SO(4)$ がコンパクトであるから，$\bar{H} \subset SO(4)$，したがって $\bar{H}$ もコンパクトである．

$\alpha_1 : \alpha_2$ が無理数ならば，$\exp(tA) = 1_4$ となるような $t > 0$ は存在しないから H は（II）型ではない．しかし（I）型とすれば，$H = \bar{H} \cong \boldsymbol{R}$ となり，$\boldsymbol{R}$ はコンパクトでないから矛盾．したがって（I）型でもない．よってこの場合 H は（III）型である．

さて

$$H' = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 t_1 & -\sin\alpha_1 t_1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_1 t_1 & \cos\alpha_1 t_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_2 t_2 & -\sin\alpha_2 t_2 \\ 0 & 0 & \sin\alpha_2 t_2 & \cos\alpha_2 t_2 \end{pmatrix} \quad (t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}) \right\}$$

とおく．H' は二つのパラメーターをもつ群，すなわち2次元のリー群である．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_2 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix}$$

とおけば，上の行列を $(\exp t_1 A_1)(\exp t_2 A_2)$ とかくことができる．すなわ

ち

$$H' = \{ (\exp t_1 A_1)(\exp t_2 A_2) \quad (t_1, t_2 \in \boldsymbol{R}) \}.$$

H' は明らかに $SO(4)$ の閉部分群で，$H \subset H'$ であるから，$\bar{H} \subset H'$.

さて2次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^2$ から H' の上への写像

$$\boldsymbol{R}^2 \ni (t_1, t_2) \overset{\varphi}{\longmapsto} \varphi(t_1, t_2) = (\exp t_1 A_1)(\exp t_2 A_2)$$

は容易にわかるように群の（連続）準同型であり，しかも開写像である．その核

$$\Delta = \{ (t_1, t_2) \in \boldsymbol{R}^2 \mid \varphi(t_1, t_2) = 1_4 \}$$

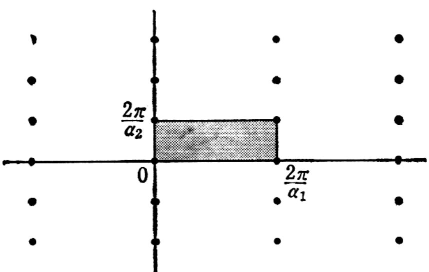
は

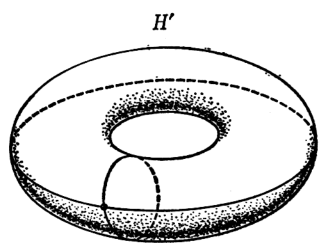
$$\left\{ \left(\frac{2\pi}{\alpha_1} m_1, \ \frac{2\pi}{\alpha_2} m_2 \right) \middle| \, m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z} \right\}$$

によって与えられる．$\Delta \cong \boldsymbol{Z}^2$ であるから，

$$H' \cong \boldsymbol{R}^2/\Delta \cong \boldsymbol{R}^2/\boldsymbol{Z}^2 \cong (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}) \times (\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}),$$

すなわち H' は“2次元のトーラス群”である．Δ の $\boldsymbol{R}^2$ における“基本領域”は $2\pi/\alpha_1$, $2\pi/\alpha_2$ を二辺とする長方形で与えられ，その対応辺をはり合せることにより一つのドーナッツ面が得られる．これが H' の位相的モデルである．





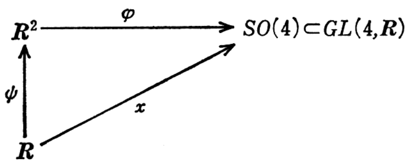
さて $\boldsymbol{R}$ から $\boldsymbol{R}^2$ の中への“対角写像”

$$\phi : t \longmapsto (t, t)$$

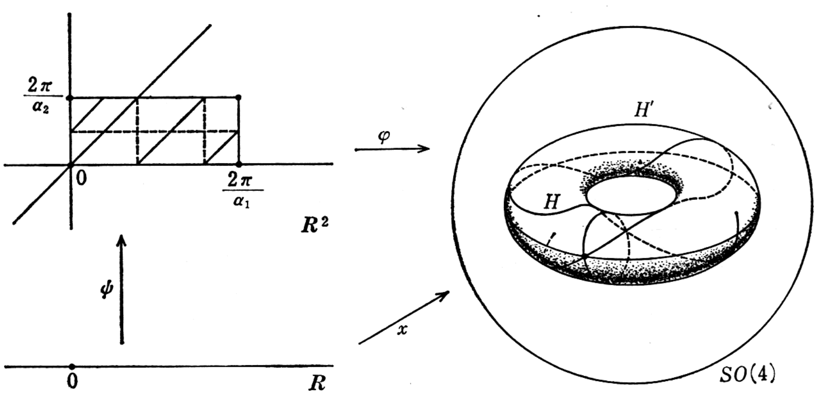
を考えれば，上の定義から

$$x(t) = \exp(tA) = \varphi(\phi(t)).$$

このように準同型 $t \longmapsto x(t)$ は二つの準同型 φ, ψ の"積"（合成）に分解される：



$\alpha_1 : \alpha_2$ が無理数のとき，$\overline{H}$ は H' の閉部分群，したがってカルタンの定理によりリー群である．$\dim \overline{H} \leqslant \dim H' = 2$ であるが，$\dim \overline{H} = 1$ ならば $\overline{H}$ 自身がワン・パラメーター群になってしまい $H \subsetneqq \overline{H}$ に矛盾することが容易にわかる．よって $\dim \overline{H} = 2$，したがって $\overline{H} = H'$ でなければならない．すなわち，H は H' の中で稠密である．［この場合 H' の閉部分群を決定すること（それは $\boldsymbol{R}^2$ の閉部分群で $\varDelta$ を含むものを決めることと同値）は容易であるから，カルタンの定理を使う必要はない．］H はドーナッツ面 H' にからまる（無限に長い）つる草のようなものである．それは H' 上を稠密に埋めるが，決して自分自身と交わることはない．



上の結果を $\boldsymbol{R}^2$ の中で表現すれば，任意の点 (t_1, t_2) に対し modulo $\varDelta$ でいくらでも近い対角線上の点 (t, t) が存在すること，すなわち任意の $\varepsilon > 0$ に対しある $t \in \boldsymbol{R}$, $m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}$ があって

$$\begin{cases} \left|t_1-t-m_1\dfrac{2\pi}{\alpha_1}\right|<\varepsilon, \\ \left|t_2-t-m_2\dfrac{2\pi}{\alpha_2}\right|<\varepsilon \end{cases}$$

が成立することを意味する．適当に変数変換をすれば，これを次のようにいい表わすこともできる．

定理 3. $\alpha_1, \alpha_2>0$, α_1/α_2 が無理数のとき，任意の二つの実数 t_1, t_2 と $\varepsilon>0$ に対し，ある実数 t と二つの整数 m_1, m_2 があって

$$\begin{cases} |t_1-\alpha_1 t-m_1|<\varepsilon, \\ |t_2-\alpha_2 t-m_2|<\varepsilon \end{cases}$$

が成立する．

特に $t_1=t_2=0$ とおけば直線 $\{(\alpha_1 t, \alpha_2 t)\,(t\in \boldsymbol{R})\}$ にいくらでも近い "格子点" (m_1, m_2) が存在することがわかる．このような "近似定理" が位相群論的考察から導かれるのは一興であろう．

5. 固有値による分類

前章以来ワン・パラメーター群 $H=\{\exp tA\}$ の型について，いくつかの実例を中心に考えてきたが，これらから一般的結論を予想することもそう難しいことではない．実際次の定理が成立する．（これも行列の固有値，ジョルダン標準形等を学ばれた読者にはちょうどよい練習問題となるだろう．）

定理 4. $H=\{\exp(tA)\,(t\in\boldsymbol{R})\}$ が（II）型または（III）型になるためには，A が対角化可能（"半単純"）でその固有値がすべて純虚数であることが必要十分である．特に H が（II）型になるためには，さらにその固有値の比が有理数であることが必要十分である．

なお，H がいつ "代数群" になるか，すなわち $GL(n, \boldsymbol{R})$ の中で成分の多項式を0とおいて得られる（いくつかの）方程式によって定義される群になるか，その条件を求めることも面白い問題である．結論だけをいえば，まず（II）型のワン・パラメーター群 H はいつでも代数群である．（もっと一

般に，コンパクトなリー群は代数群である！[†]）（Ⅰ）型の群 H が代数群になるためには，A が巾零であるか，または A が対角化可能でその固有値がすべて実数，しかもその比が有理数となっていることが必要十分である[††]．（この例からもコンパクト群と代数群の間に密接な関係があることが察せられるであろう．）

---

†）これはいわゆる淡中の双対定理からの帰結である．Chevalley [5] 参照．

††）代数群に対応するリー環（"代数的リー環"）については Chevalley の研究がある．Ann. of Math. 48 (1947)，91–100 参照．ここに述べたことは代数的リー環に関する Chevalley の判定条件の特別な場合である．

第6章　指数写像の応用

この章では少し見方をかえ，写像としての指数関数の性質とその応用についてかくことにしよう．

1. 指数写像のヤコビアン

行列の指数関数 $x = \exp X$ は n 次（実）行列の空間 $\boldsymbol{R}^{n^2} = \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ から n 次の可逆行列の群 $GL(n, \boldsymbol{R})$ の中への写像である．（したがって“指数写像”と呼ぶ方がよいだろう．）まずこの写像の $X=0$ におけるヤコビアンを計算してみよう．

$$x = \exp X = 1_n + X + \frac{1}{2!}X^2 + \frac{1}{3!}X^3 + \cdots\cdots$$

はすべての X に対して絶対収束する巾級数であるから，“Y 方向の微分” $\left.\dfrac{d}{dt}\exp(X+tY)\right|_{t=0}$ は

$$\exp(X+tY) = 1_n + (X+tY) + \frac{1}{2!}(X+tY)^2 + \cdots\cdots$$

を形式的に展開し，その t に関する1次の項の係数をみることによって得られる．すなわち（X, Y が非可換なことに注意して）

$$(1)\qquad \left.\frac{d}{dt}\exp(X+tY)\right|_{t=0} = Y + \frac{1}{2!}(XY+YX) + \frac{1}{3!}(X^2Y+XYX+YX^2) + \cdots\cdots.$$

定義により“ヤコビアン行列” $\dfrac{\partial(\exp X)}{\partial X}$ は，行列 X, x 等を（n^2 個の成分で表わして）n^2 次元ベクトルとみなしたとき，$\boldsymbol{R}^{n^2}$ の一次写像

$$Y \longmapsto \frac{d}{dt}\exp(X+tY)\Big|_{t=0}$$

を表わす n^2 次行列に他ならない．また“ヤコビアン”はその行列式 $\det\left(\dfrac{\partial(\exp X)}{\partial X}\right)$ である．特に $X=0$ に対しては

$$\frac{d}{dt}\exp(tY)\Big|_{t=0} = Y$$

であるから，$\dfrac{\partial(\exp X)}{\partial X}$ は単位行列，したがって

$$\det\left(\frac{\partial(\exp X)}{\partial X}\right)\Big|_{X=0} = 1 \tag{2}$$

である．

よく知られた陰関数の定理により，ヤコビアンが0でない点の近傍では（局所的な）逆関数が存在する．すなわち，$X=0$ と $x=1_n$ の十分小さい開近傍 V, U を適当にとれば，写像 exp を V に制限したもの（$\exp|V$ とかく）は V から U の上への1対1対応（全単射）を与え，その逆写像 $(\exp|V)^{-1}$ も解析的，したがってもちろん連続になる．このように指数写像 $X \longmapsto x=\exp X$ は局所的に $X=0$ の近傍 V と $x=1_n$ の近傍 U との解析同相を与えるのである．

2. ハウスドルフの公式

以下，上に述べたような関係にある近傍 V と U とを固定しておく．話をはっきりさせるため

$$V = V_\delta = \{\, X \in \boldsymbol{R}^{n^2} \mid \|X\| < \delta \,\}$$

と仮定する．（V をそれより小さい任意の開近傍 V' で，U をその像 $U' = \exp(V')$ でおきかえることは自由だから，このような仮定をしてもよいことは明らかであろう．）$GL(n, \boldsymbol{R})$ における乗法の連続性から，1_n の（さらに小さい）近傍 U_1 があって $U_1{}^2 \subset U$ となる．$V_1 = (\exp|V)^{-1}(U_1)$ とおく．ここでもある $0<\delta_1<\delta$ に対し $V_1 = V_{\delta_1}$ であると仮定してよい．$X, Y \in V_1$ ならば，$\exp X, \exp Y \in U_1$，したがって $(\exp X)(\exp Y) \in U$．よって

ある $Z \in V$ が一意的に定まり

$$(\exp X)(\exp Y) = \exp Z \tag{3}$$

とかける．この Z は X, Y の関数であるから

$$Z = h(X, Y) \tag{4}$$

とかくことにしよう．$h(X, Y)$ は $GL(n, \boldsymbol{R})$ における乗法を exp による（局所的）解析同相によってリー環 $\mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ の中に引き戻したものである．それは具体的にどんな関数になるだろうか？

今仮に $X_1, Y_1 \in V_1$ を固定して考える．$V_1 = V_{\delta_1}$ は n^2 次元の“方体”だから，ある $\varepsilon > 0$ があって，$|t| < 1+\varepsilon$ ならば，$tX_1, tY_1 \in V_1$，したがって $h(tX_1, tY_1)$ が定義される．よって $h(tX_1, tY_1)$ は $|t| < 1+\varepsilon$ の解析関数となり，その範囲で収束する巾級数に展開される：

$$h(tX_1, tY_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} t^\nu h_\nu(X_1, Y_1) \tag{5}$$

よって $h_\nu(X, Y)$ $(\nu = 0, 1, \cdots)$ を求めればよい．$h_\nu(X, Y)$ は X, Y に関して斉 ν 次である．実際，(5) において t を ts $(|s| < 1)$ でおきかえれば

$$\begin{aligned} h(tsX_1, tsY_1) &= \sum t^\nu h_\nu(sX_1, sY_1) \\ &= \sum t^\nu s^\nu h_\nu(X_1, Y_1). \end{aligned}$$

よって（t に関する）巾級数展開の一意性から

$$h_\nu(sX_1, sY_1) = s^\nu h_\nu(X_1, Y_1).$$

（実際，h_ν は斉 ν 次の多項式であることがわかる．）特に $h_0(X, Y)$ は定数であるが，(5) において $t=0$ とおけばわかるように

$$h_0(X_1, Y_1) = h(0, 0) = 0.$$

よってその定数は 0 である．

h_ν $(\nu \geqq 1)$ は ν の小さいものから帰納的に計算できる．定義により

$$(\exp tX)(\exp tY) = \exp\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu h_\nu(X, Y)\right), \tag{6}$$

すなわち

$$\left(1_n + tX + \frac{t^2}{2!} X^2 + \cdots\right)\left(1_n + tY + \frac{t^2}{2!} Y^2 + \cdots\right)$$

$$= 1_n + \sum_{\nu=1}^{\infty} t^\nu h_\nu + \frac{1}{2!}(\sum t^\nu h_\nu)^2 + \cdots\cdots$$

が成立する．この等式においてまず t の1次の項の係数（といっても行列だが）を比較して

$$h_1 = X+Y \tag{7.1}$$

を得る．次に2次の項の係数を比較して

$$\frac{1}{2}(X^2+2XY+Y^2) = h_2 + \frac{1}{2}h_1^2,$$

よって

$$\begin{aligned} h_2 &= \frac{1}{2}(X^2+2XY+Y^2) - \frac{1}{2}(X+Y)^2 \\ &= \frac{1}{2}(XY-YX). \end{aligned} \tag{7.2}$$

さらに3次の項の係数を比較すれば

$$\frac{1}{6}(X^3+3X^2Y+3XY^2+Y^3) = h_3 + \frac{1}{2}(h_1h_2+h_2h_1) + \frac{1}{6}h_1^3.$$

上記 h_1, h_2 の表示式を代入して計算すれば

$$h_3 = \frac{1}{12}(X^2Y-2XYX+YX^2+XY^2-2YXY+Y^2X) \tag{7.3}$$

が得られる．これらの式は（不思議なことに）± と交代積［　］だけを使ってかくことができる：

$$\left\{\begin{aligned} &h_0 = 0, \qquad h_1 = X+Y, \qquad h_2 = \frac{1}{2}[X, Y], \\ &h_3 = \frac{1}{12}([X, [X, Y]]-[Y, [X, Y]]), \qquad \cdots\cdots \end{aligned}\right. \tag{7'}$$

よって (6) から ($t=1$ とおいて)

$$\begin{aligned} &(\exp X)(\exp Y) \\ &= \exp\left(X+Y+\frac{1}{2}[X, Y]+\frac{1}{12}[X-Y, [X, Y]]+\cdots\cdots\right) \end{aligned} \tag{8}$$

という公式が得られた．(この級数は $X, Y \in V_1$ に対して絶対収束する．) これが**ハウスドルフ (Hausdorff) の公式**である．(キャンベル，ポアンカレ，

ベイカー等の名を加えることもある．第1章の冒頭にふれたのはこの公式のことである．)

一般に $h_\nu(X, Y)$ は X, Y の有理係数の斉 ν 次（非可換）多項式になり，しかもそれは交代積だけを使って表わされることが帰納的に証明される．その具体的な（explicit な）形も求められているが，やや複雑なのでここでは省略する†)．

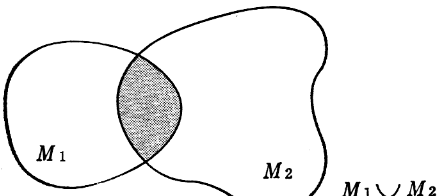
3. リー群の連結成分

指数写像を使ってもう一度リー群とリー環の対応について考えてみたい．そのため連結リー群について基本的なことを二,三述べておこう．まず定義（第4章）を復習すれば，位相空間 M（例えばユークリッド空間の部分集合）が"連結"であるとは M の空でない（相対的な）開部分集合 M', M'' で

$$M = M' \cup M'', \qquad M' \cap M'' = \phi$$

となるものが存在しないことをいう．この定義から次のような性質は容易に証明される．

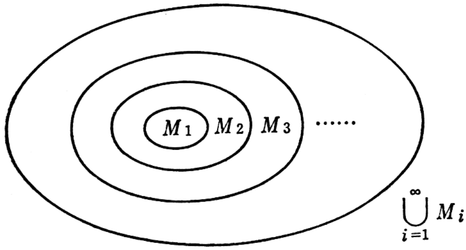
1) M_1, M_2 を（ある位相空間 M の部分集合で）共に連結，かつ $M_1 \cap M_2 \neq \phi$ とすれば $M_1 \cup M_2$ も連結である．



2) $M_i\ (i = 1, 2, \cdots)$ を（一つの位相空間 M の）連結部分集合の可算個の列で，$M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ とすれば，その和集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ も連結である．

念のため 2) を証明してみよう．もし $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ が連結でないとすれば

†) これについては J.-P. Serre, Lie algebras and Lie groups, Benjamin, 1965, または V. S. Varadarajan [6] 等を参照されたい．

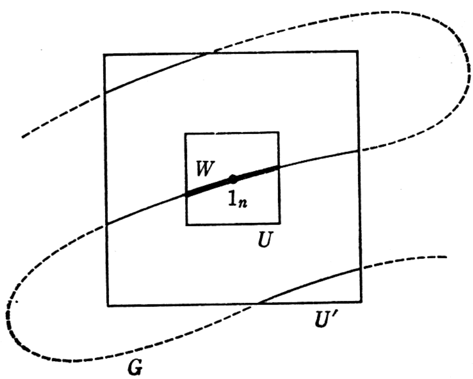


$$\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i = M' \cup M'', \qquad M' \cap M'' = \phi$$

と二つの空でない開集合に分解される．（仮に M' を資本主義圏，M'' を共産圏と考えてみる．）各々の i に対して

$$M_i = (M_i \cap M') \cup (M_i \cap M'')$$

であるが，M_i は連結だから，$M_i \cap M' = \phi$ か $M_i \cap M'' = \phi$，いいかえれば $M_i \subset M''$ か $M_i \subset M'$ かいずれかでなければならない．（"経済的に連結な" 地域，すなわち同一の経済機構をもつ地域は資本主義か，共産主義かいずれかである．）M_{i+1} に対しても同様に，$M_{i+1} \subset M''$ か $M_{i+1} \subset M'$ であるが，$M_i \subset M_{i+1}$ であるから，もし $M_i \neq \phi$, $M_i \subset M''$ ならば $M_{i+1} \subset M''$ でなければならない．（$M_i \subset M'$ ならもちろん $M_{i+1} \subset M'$ となる．）同様に，i より大きいすべての i' に対しても $M_{i'} \subset M''$ となる．よって $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i \subset M''$ となり，$M' = \phi$ となってしまう．（世界中が共産化されてし



まった！）これは矛盾である．（矛盾ではないという人もいるかもしれない．）

さて G を $GL(n, \boldsymbol{R})$ の一つの閉部分群とする．カルタンの定理により G は（相対位相に関して）それ自身一つのリー群になる．その次元を m とする．G における単位元 1_n の近傍は $W=G \cap U$ で与えられるが，U を十分小さくとれば，W は m 次元ユークリッド空間の開集合に解析同相になる．さらに U を適当にとれば W は連結であると仮定してもよい．（図を参照）

今，W から（抽象群として）生成される G の部分群を G° とする．これについて次の二つの性質を証明しよう．

（a）G° は G の（相対）開集合である．

（b）G° は連結である．

(a) の証明：$x \in G^\circ$, $w \in W$ とすれば，定義により $xw \in G^\circ$，よって $xW \subset G^\circ$．これは G° の任意の点 x の（G の中での）近傍 xW がまた G° に含まれていること，すなわち x が G° の"内点"であることを示す．よって G° は G の開部分集合である．（この証明では W が連結なことは使わなかった．）

(b) の証明：定義により G° は

$$x = w_1^{\varepsilon_1} w_2^{\varepsilon_2} \cdots\cdots w_r^{\varepsilon_r} \qquad (w_i \in W,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ r = 1, 2, \cdots)$$

とかけるような元全体の集合である．よって今

$$\widetilde{W} = W \cup W^{-1} \qquad (W^{-1} = \{ w^{-1} \mid w \in W \})$$

とおけば，$G^\circ = \bigcup_{k=1}^{\infty} \widetilde{W}^k$ となる．W が連結，$1_n \in W \cap W^{-1}$ であるから，上に述べた連結集合の性質 1）により，$\widetilde{W}$ も連結，また定義により $\widetilde{W}^k$ は連続写像

$$\widetilde{W} \times \cdots \times \widetilde{W} \ni (x_1, \cdots, x_k) \longmapsto x_1 \cdots x_k \in G$$

による $\widetilde{W} \times \cdots \times \widetilde{W}$（それは連結）の像だからやはり連結，したがって上述 2）により G° も連結である．（証終）

(a), (b) からさらに

（c）G の任意の連結部分群は G° に含まれる．

が証明できる．まず (a) から G° の G における"補集合" $G-G^\circ$ も開部

分集合（したがって G° は閉部分群）であることに注意しよう．実際，G を G° で“傍系”（coset）に分け

$$G = G^\circ \cup x_1G^\circ \cup x_2G^\circ \cup \cdots\cdots$$

とすれば，（G の等質性により）x_1G°, x_2G°, …… も開集合，よって $G-G^\circ = x_1G^\circ \cup x_2G^\circ \cup \cdots\cdots$ も開集合である．さて，H を G の任意の連結部分群とすれば

$$H = (H \cap G^\circ) \cup (H \cap (G-G^\circ)),$$
$$(H \cap G^\circ) \cap (H \cap (G-G^\circ)) = \phi$$

しかも $1_n \in H \cap G^\circ$ であるから，$H \cap G^\circ \neq \phi$. よって連結性の定義により $H \cap (G-G^\circ) = \phi$，すなわち $H \subset G^\circ$ でなければならない．(この証明では H が部分群であるということの中 $1_n \in H$ という性質しか使っていない．したがって実際には M を 1_n を含む G の任意の連結部分集合とすれば，$M \subset G^\circ$ である．すなわち G° は G の 1_n を含む最大連結部分集合である．)

(c) の特別な場合として

(d)　G° は正規部分群である．

こともわかる．実際，任意の $a \in G$ に対し G° の“共役”部分群 $aG^\circ a^{-1}$ も連結部分群である（それは連続写像 $\nu_a : x \longmapsto axa^{-1}$ による G° の像だから)．よって(c)により $aG^\circ a^{-1} \subset G^\circ$. a を a^{-1} でおきかえれば，$a^{-1}G^\circ a \subset G^\circ$，よって $G^\circ \subset aG^\circ a^{-1}$. したがって $G^\circ = aG^\circ a^{-1}$ である．

G° をリー群 G の（単位元の）**連結成分**という．特に $G = G^\circ$ のとき，G を**連結リー群**，または**解析的群**（analytic group）という．

定理 1.　G を連結リー群，W をその単位元の任意の近傍とすれば G は（抽象群として）W により生成される．

実際 (c) の証明からわかるように，W によって生成される部分群は開かつ閉である．よって G が連結ならば G 全体と一致せざるをえない．

（まだ証明はしていないが）$SO(n)$, $SL(n, \boldsymbol{R})$ 等は連結リー群である．$SO(n)$ は $O(n)$ の中で開かつ閉であるから，$SO(n)$ は $O(n)$ の“連結成分”である．同様に

$$GL^+(n, \boldsymbol{R}) = \{ x \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid \det(x) > 0 \}$$

とおけば，$GL^+(n, \boldsymbol{R})$ は $GL(n, \boldsymbol{R})$ の連結成分である．（これらのことは後で証明する．）

4. リー群とリー環の対応

G を $GL(n, \boldsymbol{R})$ の閉部分群（したがってリー部分群），$\mathfrak{g}$ をそのリー環とする．$\mathfrak{g}$ は G の単位元 1_n における接ベクトル空間として定義された．したがって $\mathfrak{g}$ は 1_n の近傍 W だけによって定まる．したがって G の連結成分 G° も同じリー環 $\mathfrak{g}$ をもつ．よってリー群とリー環の対応を考えるときには，はじめから連結リー群だけに話を限った方が簡明である．以下この章では G はいつも連結であると仮定する．まず

定理 2.　$A \in \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$ に対し

$$A \in \mathfrak{g} \Longleftrightarrow \exp tA \subset G \tag{9}$$

を証明しよう．$\Longleftarrow$ の方は明らかであろう．$\exp tA \subset G$ ならば，ワン・パラメーター群 $x(t) = \exp tA$ は G 上の曲線でその 1_n における接ベクトルが A であるから，定義により $A \in \mathfrak{g}$.

逆をいうためには，次のようなことをいわなければならない．曲線 $x = x(t) = \exp tA$ 上の点 $x = x_0$ における接ベクトルは x_0A である．（指数関数は微分方程式 $\dfrac{dx(t)}{dt} = x(t)A$ の解であった．）仮定により $A \in \mathfrak{g}$，すなわち A は $x = 1_n$ における G の接ベクトルである．$GL(n, \boldsymbol{R})$ の等質性により x_0A は $x = x_0$ における x_0G の接ベクトルになっている．$x = 1_n = x(0)$ は確かに G に属する．これらのことからすべての t に対し $x = x(t) \in G$ であることを導かなければならない．（地球上にいる人がいつでも水平の方向——すなわち接平面の方向——に進んで行くとすれば，いつまでたっても地球を離れることはできない．）

さて $A \in \mathfrak{g}$ とすれば，ある $\delta' > 0$ があって

$$|t| < \delta' \Longrightarrow tA \in V\,(= V_\delta)$$

である．ワン・パラメーター群 $\{\exp tA\ (t \in \boldsymbol{R})\}$ はその単位元の近傍

$\{\exp tA\,(|t|<\delta')\}$ によって生成される（定理1の特別な場合）から，定理2の $\Longrightarrow$ をいうためには $|t|<\delta'$ に対して $\exp tA\in G$ であることをいえば十分である．

G は $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の中の m 次元"曲面"（多様体）であるから，はじめに近傍 V, U を十分小さくとっておけば，$W=G\cap U$ は U の中で n^2 個の座標（すなわち行列の成分）に関するいくつかの（解析的な）方程式 $F_\alpha(x)=0$ $(\alpha=1,\cdots,p)$ で定義された曲面であると思ってよい*．（p. 273 の補遺参照）よって $|t|<\delta'$ に対し $\exp tA\in G$ をいうためには

(10) $$F_\alpha(\exp tA)=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,p)$$

をいえば十分である．

$\varphi_\alpha(t)=F_\alpha(\exp tA)$ とおく．$1_n\in G$ であるから

$$\varphi_\alpha(0)=F_\alpha(\exp(0))=F_\alpha(1_n)=0.$$

よって上記のことをいうためには

$$\varphi_\alpha'(t)=0 \qquad (|t|<\delta',\ \alpha=1,\cdots,p)$$

をいえばよい．（そうすれば，φ_α は $|t|<\delta'$ において定数，したがって恒等的に0となる．）$x_0=\exp t_0A$, $|t_0|<\delta'$ とすれば微分の連鎖律により

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha'(t_0)&=\frac{d}{dt}F_\alpha(\exp tA)\Big|_{t=t_0}\\&=(\mathrm{grad}\,F_\alpha)(x_0)\cdot\left(\frac{d\exp tA}{dt}\Big|_{t=t_0}\right)\\&=(\mathrm{grad}\,F_\alpha)(x_0)\cdot(x_0A),\end{aligned}$$

ここに・は二つの n^2 次元ベクトル（すなわち n 次行列）の内積を表わす．一方，x_0G の $x_0=\exp t_0A$ における"接平面"の方程式は

(11) $$(\mathrm{grad}\,F_\alpha)(x_0)\cdot(x-x_0)=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,p)$$

であった．[成分を使ってかけば

$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial F_\alpha}{\partial x_{ij}}(x_0)(x_{ij}-(x_0)_{ij})=0 \qquad (\alpha=1,\cdots,p)$$

である．] 仮定により x_0A は $x=x_0$ における接ベクトルであるから

$$(\mathrm{grad}\,F_\alpha)(x_0)\cdot(x_0A)=0,$$

すなわち $\varphi_\alpha'(t_0)=0$ となって証明ができた.

さて1で説明したように指数写像 exp は $0\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ の十分小さい開近傍 V と $1_n\in GL(n,\boldsymbol{R})$ の対応する開近傍 $U=\exp(V)$ の間の解析同相を与えている. 上の定理2により

$$\exp(\mathfrak{g}\frown V)\subset G\frown U \tag{12}$$

であるが, $\exp(\mathfrak{g}\frown V)$ の各点は m 次元ユークリッド空間と同相な近傍をもつから, 次元論のよく知られた定理 ("領域の不変性") により, $\exp(\mathfrak{g}\frown V)$ は $G\frown U$ の開集合でなければならない. このことから前述のように $W=G\frown U$ が連結であるように V, U をとっておけば, (12) において等号が成立することがいえる. (精細は略すが直観的には明白であろう.)

以上のことは G の単位元 1_n の近傍が $\exp(\mathfrak{g}\frown V)$ によって与えられることを示している. 今リー環 $\mathfrak{g}$ のベクトル空間としての底 $X_1,\cdots,X_m$ をとり

$$V'=\{\sum t_iX_i\mid|t_i|<\delta'\}$$

とおく. δ' を十分小さく $V'\subset V$ となるようにとれば $W'=\exp V'$ は G における 1_n の開近傍で, W' の点は

$$x=\exp\left(\sum_{i=1}^m t_iX_i\right)\qquad(|t_i|<\delta')$$

の形に一意的に表わされる. したがって $(t_1,\cdots,t_m)(|t_i|<\delta')$ を 1_n の近傍での "局所座標" とみなすことができる. これはリー群 G の [底 (X_i) に関する] **第一種標準座標**と呼ばれるものである.

さらに G は連結であると仮定しておいたから, その単位元の近傍 W' によって, したがってまた指数写像の像 $\exp(\mathfrak{g})=\{\exp X\mid X\in\mathfrak{g}\}$ によって生成される. (しかし一般には $\exp(\mathfrak{g})=G$ となるとは限らない.)

定理2からの他の系として

系. G, G' を $GL(n,\boldsymbol{R})$ の二つの連結閉部分群, $\mathfrak{g},\mathfrak{g}'$ をそのリー環とすれば

$$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}'\iff G\subset G'.$$

特に，$\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'$ ならば $G=G'$ である．

実際，$\Longleftarrow$ は明らかだが，$\mathfrak{g}\subset\mathfrak{g}'$ とすれば

$$X\in\mathfrak{g}\Longrightarrow X\in\mathfrak{g}'\Longrightarrow \exp X\in G'.$$

上述のように G は $\exp(\mathfrak{g})$ によって生成されるから $G\subset G'$ となる．特に $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'$ なら $G\subset G'$ かつ $G\supset G'$ ゆえ $G=G'$ である．($\mathfrak{g}\cong\mathfrak{g}'$ ならば，G と G' が“局所同型”になることもわかる．)

以上により（連結）リー群からリー環への対応が1対1であることがわかった．

5. リー群の構成

リー群とリー環の対応を完全なものにするためには，上記と逆の対応 $\mathfrak{g}\longmapsto G$ を確立しなければならない．すなわち，与えられたリー環 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ に対し $G\longmapsto\mathfrak{g}$ となるようなリー群 $G\subset GL(n,\boldsymbol{R})$ の存在を証明する必要がある．そのためには実際そのような群 G を構成してみせればよい．ここでその精細を述べることはできないが，その大略を説明してみよう．大雑把にいって二つの構成法がある．

1.　m 次元リー環 $\mathfrak{g}\subset\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ が与えられたとき，$GL(n,\boldsymbol{R})$ の各点 x に $x\cdot\mathfrak{g}=\{x\cdot X\mid X\in\mathfrak{g}\}$ を対応させる対応を考える．$x\cdot\mathfrak{g}$ は $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の m 次元部分空間であるから，この対応はベクトル場の一種の拡張で“m 次元ベクトル空間場”とでもいうべきものである．丁度ベクトル場に対して積分曲線が存在したように，この“m 次元ベクトル空間場”$\{x\cdot\mathfrak{g}\mid x\in GL(n,\boldsymbol{R})\}$ に対しても各点でそれを接ベクトル空間としてもつ m 次元“積分曲面”が存在することが証明される（フロベニュースの定理）．もちろんそのためには“ベクトル空間場”のある種の“積分可能条件”が必要なのであるが，今の場合，$\mathfrak{g}$ がリー環であることからその条件もみたされていることが出るのである．特に単位元 1_n を通る積分曲面を G とすれば，G が（その固有の位相に関して）リー群になることは比較的容易に証明される．そしてその構成法から $G\longmapsto\mathfrak{g}$ となることは明らかである．（精しくは前に引用した

Chevalley または Varadarajan の本を見られたい．)

上記の方法は本質的に微分方程式の解の存在に依存しているが，行列群の場合には指数写像が具体的に巾級数で定義されてしまうから，微分方程式を使う必要はない．また指数写像さえ定義されれば，連結リー群 G は抽象群として $\exp\mathfrak{g}$ によって生成されるはずであった．それゆえ指数写像を使って次のような構成法も考えられる．

2.　開近傍 V, V_1 を前に述べたようにとる．$W=\exp(\mathfrak{g}\frown V)$ は m 次元ユークリッド空間の開集合と解析同相であり，$X, Y\in\mathfrak{g}\frown V_1$ に対し $\exp X$, $\exp Y$ の積はハウスドルフの公式によって具体的に与えられる．この積が(その定義範囲で)リー群における積と同じ条件(結合律，逆の存在，解析性，etc.)をみたしていることは容易に確かめられる．(このようにユークリッド空間の開部分集合で“部分的な”積が定義されているものを**リー群芽**という．)一旦リー群芽ができれば，それを延長して全体的なリー群 G を構成することは(これも比較的)簡単な位相群の議論で片づけられる．(ただしその際導入される G の位相は相対位相とは異なる．)この方法の利点はハウスドルフの公式が全く代数的性格をもっているので，普通のリー群の場合だけでなく，より抽象的な p-進リー群や，代数群の場合にも適用できる点である．(これについては Serre の本，または N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Ch. 2,3, Hermann, 1972 を参照して下さい．)

どちらの構成法でも同じことだが，このようにリー環から出発してリー群を作ろうとすると，ワン・パラメーター群の例ですでに見たように，どうしても閉じていない部分群が出てきてしまう．そのような部分群 G は，その構成法から見られるように，大きいリー群 G' (今の場合 $GL(n, \boldsymbol{R})$)の“部分集合”と考えるよりは，G' の外にあってそれ自身独立したリー群の構造をもち，かつ G から G' の中への1対1解析写像が定義されているようなものと考えた方が自然である．このようなことを厳密に述べるためには“多様体の埋込み”，“部分多様体”等の概念を説明しなければならなくなるので，ここではこれ以上立入らないことにしよう．いずれにせよ，リー群論を組織

的に展開しようとすれば，始めからこのような閉じていないリー部分群を含めて議論しなければならず，それが（大局的な）リー群論を難しくする一つの原因なのである．

第7章　変換群としてのリー群

1. 変換群

リー群（もっと一般に群）は数学においていわゆる“変換群”として現われる場合が多い．我々が例として考えている $GL(n, \boldsymbol{R})$ や $O(n)$ は行列の群であるが，行列とはそもそも（底を固定した）ベクトル空間の一次変換を表わすものだから，これらの群をそのベクトル空間の変換群と考えることができる．もっと精しくいえば，（底を固定した）n 次元ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ を V とかくとき，$GL(n, \boldsymbol{R})$ は V の可逆な“一次変換”全体が作る群，$O(n)$ はその中で特に“内積”

$$(1)\qquad x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (x = (x_i),\ y = (y_i) \in V)$$

を不変にするような一次変換（それを“直交変換”という）の全体が作る部分群ということができる．ガロア理論を学ばれた方はガロア群が代数方程式の根の“置換群”（あるいは，根によって生成された代数体の自己同型群）であることを御存知であろう．これも根の集合（またはその生成する体）の変換群である．もっと大風呂敷を広げてクライン（Klein）流にいえば，種種の幾何学にはそれぞれ固有の変換群が対応しており，その不変量，ないしは不変な性質を研究することがその幾何学の主要な課題となるのである．——以下はこのような見地からリー群を見直してみよう．

2. 変換群の定義と例

まず一般の変換群の定義をしておこう．

一つの群 G と一つの集合 M とがあるとき，“G が M に作用する”または“G は M の変換群である”というのは $a \in G$ と $x \in M$ の組に対し $ax \in M$ を定める法則が与えられており，次の二条件が成立することをいう．

（i） 任意の $a, b \in G$, $x \in M$ に対し

$$(ab)x = a(bx),$$

（ii） G の単位元を 1 とかくことにすれば，任意の $x \in M$ に対し

$$1x = x.$$

今，$a \in G$ に対し $x \longmapsto ax$ によって定義される（M をそれ自身の中にうつす）写像を ρ_a とかくことにすれば，条件 (i), (ii) をそれぞれ

(2)　$$\rho_a \circ \rho_b = \rho_{ab} \qquad (\circ \text{は写像の結合を表わす}),$$

(3)　$$\rho_1 = 1_M \qquad (\text{集合 } M \text{ の恒等写像})$$

とかくことができる．(2), (3) から特に

$$\rho_a \circ \rho_{a^{-1}} = \rho_{aa^{-1}} = \rho_1 = 1_M,$$

同様に $\rho_{a^{-1}} \circ \rho_a = 1_M$．よって ρ_a は M のそれ自身への全単射で，$(\rho_a)^{-1} = \rho_{a^{-1}}$ となる．変換群の簡単な例を少し挙げてみよう．

例 1.　M を任意の集合，G を M のそれ自身への全単射（それを M の“置換”ともいう）全体の集合とする．G は写像（置換）の結合を積として一つの群になる．これを M の**全置換群**という．G の単位元は M の恒等写像（恒等置換）1_M で与えられる．したがって G の M への作用をその写像としての作用そのものと定義すれば，条件 (i), (ii) が成立することは自明である．集合 M の全置換群を $\mathfrak{S}(M)$ とかくことにする．$M = \{1, 2, \cdots, n\}$ のとき $\mathfrak{S}(M) = \mathfrak{S}_n$ を n 文字の“対称群”という．

一般に群 G が M に作用するというのは，G から $\mathfrak{S}(M)$ の中への写像 $a \longmapsto \rho_a$ で (2), (3) をみたすもの，すなわち群の準同型，が与えられていることに他ならない．特にこの準同型が単射になっているとき，すなわち

(4)　$$\rho_a = 1_M \Longrightarrow a = 1$$

がいえるとき，群 G は M に**効果的** (effective) に作用するという．その場合には群 G を $\mathfrak{S}(M)$ の部分群 $\{\rho_a | a \in G\}$ と同一視することができる．

例 2.　G を任意の群，$M=G$ とし，$x\longmapsto ax$ を群 G における“左乗”（前に λ_a とかいた）とすれば，明らかに (i), (ii) が成立する．この場合 (4) も成立するから群 G はそれ自身の上に左乗によって効果的に作用している．

例 3.　同様に群 G における右乗 $\mu_a: x\longmapsto xa$ を考えると (2) は成立しないが，そのかわりに

$$(2') \qquad \mu_a\circ\mu_b=\mu_{ba} \qquad (a,b\in G)$$

が成立する．また (3), (4) は成立する．よって $\rho_a=\mu_{a^{-1}}$ と定義すれば (2), (3), (4) が成立する．このように G はそれ自身の上に右側からも $\mu_{a^{-1}}$ によって効果的に作用している．

例 4.　群 G はそれ自身の上に**内部自己同型**

$$\nu_a:\ x\longmapsto axa^{-1}$$

によっても作用している．例 2, 3 の記号を使えば

$$\nu_a=\lambda_a\circ\mu_{a^{-1}}=\mu_{a^{-1}}\circ\lambda_a$$

である．しかしこの作用は一般に効果的ではない．

$$\{\, a\in G \mid \nu_a=1_G \,\}=\{\, a\in G \mid ax=xa\,(\forall x\in G) \,\}$$

は G の“中心”(center) と称する部分群である．

例 5.　$G=GL(n,\boldsymbol{R})$, $M=\boldsymbol{R}^n$ とし，G の M への作用を通常のように［すなわち (n,n) 型行列と $(n,1)$ 型行列の積として］定義すれば，G は M に効果的に作用している．この場合，写像

$$\rho_a:\ x\longmapsto ax$$

はベクトル空間 $M=\boldsymbol{R}^n$ の一次変換であり，線形代数で学ばれたように，M の可逆一次変換はすべてこのようにして（しかもただ一通り）に得られる．いいかえれば，対応

$$G\ni a\longmapsto \rho_a\in\mathfrak{S}(M)$$

は G から M の置換で線形であるもの全体の作る部分群（それをベクトル空間 M の**全一次変換群**という）への全単射を与える．したがって $GL(n,\boldsymbol{R})$ を $M=\boldsymbol{R}^n$ の全一次変換群と同一視することができる．

3. 解析的変換群，線形変換群

2で述べた定義では G はただの群（抽象群）としたが，特に G がリー群，M が（解析的）"多様体"で写像

$$(a, x) \longmapsto ax \tag{5}$$

が積多様体 $G\times M$ から M の中への解析的写像になっているとき，G は M に**解析的に**作用するという．（正確な定義は省略するが以下述べる例についてその意味は明白であろう．）

G がリー群，$M=G$ のとき，例 2, 3, 4 で述べた作用 $\lambda_a, \mu_{a^{-1}}, \nu_a$ はいずれも（リー群の定義から明らかなように）解析的である．例5の作用

$$GL(n, \boldsymbol{R})\times \boldsymbol{R}^n \ni (a, x) \longmapsto ax \in \boldsymbol{R}^n$$

は a についても，x についても線形（すなわち双一次）であるからもちろん解析的である．この例のように特に M がベクトル空間で (5) の写像 $G\times M \longrightarrow M$ が単に解析的であるばかりでなく $x\in M$ については線形になっているとき，G の作用は**線形**であるという．このとき写像 $a\longmapsto \rho_a$ は G から M の全一次変換群の中への（リー群の）解析的準同型を与える．特に G の作用が効果的ならば，G は M の全一次変換群のリー部分群（必ずしも閉じていない）と同一視できる．

線形変換群の例をさらに挙げておこう．

例 6.　$G=GL(n, \boldsymbol{R})$, $M=\boldsymbol{R}^{n^2}$（n 次正方行列全体の空間）とし，G の M への作用を例4と同様

$$\rho_a:\ x\longmapsto axa^{-1}$$

によって定義すれば，一つの線形な作用が得られる．

例 7.　同じく $G=GL(n, \boldsymbol{R})$, $M=\boldsymbol{R}^{n^2}$ とし，G の M への別の作用を

$$\rho_a{}':\ x\longmapsto ax\,{}^t a \tag{6}$$

によって定義することもできる．これも線形な作用である．

4. オービット，固定部分群

群 G が空間 M（さし当り任意の集合とする）に作用しているとき，$x \in M$ に対し

(7) $$Gx = \{ ax \mid a \in G \}$$

を x の G による**オービット**（orbit，軌跡と訳してもよいが英語のままにしておく），または略して G-オービットという．一方，$x \in M$ に対し

(8) $$G_x = \{ a \in G \mid ax = x \}$$

は明らかに G の部分群になる．これを x の**固定部分群**（stabilizer または isotropy subgroup）という．

M の部分集合 M_1 は

$$a \in G,\ x \in M_1 \Longrightarrow ax \in M_1$$

が成立するとき，G **に対して不変**，略して G-**不変**（または単に不変）という．

例 1,2,3 で述べた作用では任意の $x \in M$ に対し $M = Gx$ となる．いいかえれば，M はただ一つのオービットからなる．このとき G は M に**推移的**（transitive）に作用するという．あるいは“空間 M は変換群 G に関して**等質**（homogeneous）である”と表現することもある．

一般に，$x, x' \in M$ はある $a \in G$ があって $x = ax'$ となるとき G **に関して同値**であるといい，記号で $x \underset{G}{\sim} x'$ とかくことにする．この関係は明らかに次の“同値律”を満足している：

（i） すべての $x \in M$ に対し $x \underset{G}{\sim} x$．
　($1 \in G,\ x = 1x$ だから．)

（ii） $x \underset{G}{\sim} x' \Longrightarrow x' \underset{G}{\sim} x$．
　($a \in G,\ x = ax'$ ならば，$a^{-1} \in G,\ x' = a^{-1}x$ だから．)

（iii） $x \underset{G}{\sim} x',\ x' \underset{G}{\sim} x'' \Longrightarrow x \underset{G}{\sim} x''$．
　($a, b \in G,\ x = ax',\ x' = bx''$ ならば，$ab \in G,\ x = a(bx'') = (ab)x''$ だから．)

x のオービット Gx はこの同値関係に関する x の“同値類” $\{ x' \mid x' \in M,$

$x' \underset{G}{\sim} x\}$ に他ならない．したがって二つのオービットは完全に一致するか，共有点をもたないかのいずれかである．［$Gx_1 \cap Gx_2 \neq \phi$ ならば，$x_3 \in Gx_1 \cap Gx_2$ とするとき，$x_3 \underset{G}{\sim} x_1$, $x_3 \underset{G}{\sim} x_2$. よって (ii), (iii) により $x_1 \underset{G}{\sim} x_2$ となり $x_1 \in Gx_2$. したがって $Gx_1 \subset Gx_2$ を得る．同じ理由で $Gx_2 \subset Gx_1$. したがって $Gx_1 = Gx_2$.］

それゆえ M は互に共通点をもたないいくつかの G-オービットの和に分解される．一般に互に共通点をもたない部分集合の和を"直和"といい，それを表わすのに普通の和の記号 $\cup$ のかわりに $\amalg$ を使うことがある．今，M の各 G-オービットから一つずつ代表をえらび，その全体（それを"代表系"という）を R とかけば

$$M = \coprod_{x \in R} Gx \tag{9}$$

である．これを M の（変換群 G に関する）**オービット分解**という．

例4における G-オービットを群 G の**共役類** (conjugacy class) という．この場合のオービット分解，すなわち G の共役類分解は群論（特に有限群論）で非常に重要である．

例5の $G = GL(n, \boldsymbol{R})$ に関する $M = \boldsymbol{R}^n$ のオービット分解は

$$\boldsymbol{R}^n = \{0\} \cup (\boldsymbol{R}^n - \{0\}) \tag{10}$$

となる．ゼロベクトルだけからなる集合 $\{0\}$，およびその補集合 $\boldsymbol{R}^n - \{0\}$ が G-不変であることは明らか．したがって (10) を得るためには G が $\boldsymbol{R}^n - \{0\}$ に推移的に作用していることをいえば十分である．$\boldsymbol{R}^n$ の標準底を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots, \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおく．$x_1 \in \boldsymbol{R}^n$, $x_1 \neq 0$ とすれば，x_1 を含む底 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が存在する．この x_i を第 i 列ベクトルとする n 次正方行列を a とすれば，明らかに

$$ae_1=(x_1,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=x_1,$$

したがって $x_1\in Ge_1$. x_1 は $\boldsymbol{R}^n-\{0\}$ の任意の元であったから $\boldsymbol{R}^n-\{0\}=Ge_1$ を得る. —— この場合，e_1 の固定部分群 G_{e_1} は次の形の行列全体の作る部分群である：

$$a=\begin{pmatrix}1 & * & \cdots\cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & a' & \\ 0 & & & \end{pmatrix},\qquad a'\in GL(n-1,\boldsymbol{R}).$$

例 6 における同値類も“共役類”という. n 次行列の共役類の決定（それを定める不変量を求めること），便利な代表系のとり方等は線形代数の中心的課題であるから，読者の多くの方はすでに学ばれたことと思う. すなわち，特性多項式，ジョルダン標準形等の理論である[†]. （この問題を考えるときには実数よりも複素数で考えた方が都合がよい.）

例 7 の作用について以下少し精しくしらべてみることにしよう. まず n 次（正方）行列全体の空間 $\boldsymbol{R}^{n^2}$ の中で，対称行列，交代行列はそれぞれ部分空間を作る. それを $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$, $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ とかく：

$$\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})=\{\,x\in\boldsymbol{R}^{n^2}\mid {}^tx=x\,\},$$
$$\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})=\{\,x\in\boldsymbol{R}^{n^2}\mid {}^tx=-x\,\}.$$

$\boldsymbol{R}^{n^2}$ はこの二つの部分空間の直和になっている. 実際，任意の $x\in\boldsymbol{R}^{n^2}$ に対し

$$S=\frac{1}{2}(x+{}^tx),$$
$$A=\frac{1}{2}(x-{}^tx)$$

---

†) 「線型代数学」，第 4 章参照. ジョルダン標準形については「雑談」VIIにも解説した.

とおけば，明らかに $S\in \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$, $A\in \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ で，$x=S+A$. よって

$$\boldsymbol{R}^{n^2} = \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})+\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R}) \tag{11}$$

となる．しかも明らかに $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})\cap\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})=\{0\}$ だから，(11) の分解は（ベクトル空間の）"直和"である．（ここでいう直和と少し前に述べた集合の直和とは意味が違うことに注意.）

部分空間 $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$, $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ はともに $G=GL(n,\boldsymbol{R})$ の作用 ρ_a' に対して不変である．[例えば，$a\in GL(n,\boldsymbol{R})$，$x\in \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ とすれば，${}^t(ax{}^ta) = a{}^tx{}^ta = -ax{}^ta$，よって $ax{}^ta\in \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$．したがって，$\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ は G–不変である.]——我々は問題を単純化して $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ と $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ をそれぞれ G–オービットに分解することを考えよう．（これから $\boldsymbol{R}^{n^2}$ 自身のオービット分解が得られるわけではない．それはより複雑である.）

5. $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ のオービット分解

$S\in \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ とすれば，よく知られた定理により S の固有値はすべて実数であり，S は直交行列によって対角化される[†]．すなわちある直交行列 a があって

$$aSa^{-1} = aS{}^ta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad (\lambda_i \text{ は実数}) \tag{12}$$

となる．ここで λ_i のうち p 個が正，q 個が負，残りの $n-p-q$ 個は 0 であるとする．置換の行列も直交行列であるから，a を適当にとることにより

$$\lambda_1,\cdots,\lambda_p>0,\quad \lambda_{p+1},\cdots,\lambda_{p+q}<0,\quad \lambda_{p+q+1}=\cdots=\lambda_n=0 \tag{13}$$

であるとしてよい．二つの整数の組 (p,q) を S の**符号**という．我々の問題に対して次の**シルベスター** (Sylvester) **の定理**が基本的である：

定理 1. 二つの n 次実対称行列 S_1, S_2 が（例7の意味で）G–同値になるためには，S_1, S_2 の符号が一致することが必要かつ十分である[††]．

"十分"なことはほとんど明らかである．今，$\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ の元で符号が

---

†) 「線型代数学」p. 153，定理4参照.

††) 「線型代数学」p. 160，定理5参照.

(p, q) であるもの全体の集合を $\mathcal{S}_{p,q}^{(n)}$ とかくことにする．また

$$\mathbf{1}_{p,q}{}^{(n)}=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

（対角線上に 1 が p 個，-1 が q 個，0 が $n-p-q$ 個）

とおく．$S\in\mathcal{S}_{p,q}^{(n)}$ が (12), (13) をみたしているとき

$$a_1=\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \sqrt{\lambda_p} & & & & & \\ & & & \sqrt{-\lambda_{p+1}} & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \sqrt{-\lambda_{p+q}} & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

とおけば，$a_1aS{}^ta{}^ta_1=1_{p,q}{}^{(n)}$ であるから $S\underset{G}{\sim}1_{p,q}{}^{(n)}$．すなわち

(14)　$$\mathcal{S}_{p,q}^{(n)}\subset G1_{p,q}{}^{(n)}.$$

よってもし $S_1, S_2\in\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ が同じ符号 (p, q) をもてば，それらは同じ G-オービットに入るから G-同値である．

逆をいうために $S_1, S_2\in\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ の符号を (p_1, q_1), (p_2, q_2) とし，$S_1\underset{G}{\sim}S_2$ と仮定する．まずこの仮定から明らかに $\mathrm{rank}\,S_1=\mathrm{rank}\,S_2$（$\mathrm{rank}\,X$ は X の“階数”を表わす[†]）．この共通の値を r とすれば

$$\mathrm{rank}\,S_1=p_1+q_1,\qquad \mathrm{rank}\,S_2=p_2+q_2$$

であるから

(15)　$$p_1+q_1=p_2+q_2=r$$

---

†) 「線型代数学」p. 105．$S_1=aS_2{}^ta$ $(a\in G)$ のとき $\mathrm{rank}\,S_1=\mathrm{rank}\,S_2$ となることは，同 p. 106，定理 8 の特別な場合である．

という関係が得られる．

$$\mathcal{S}_r^{(n)} = \{ S \in \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R}) \mid \mathrm{rank}\, S = r \}$$

とおく．

補題 1.　$p+q=r$ のとき $\mathcal{S}_{p,q}^{(n)}$ は $\mathcal{S}_r^{(n)}$ の（相対的）開部分集合である．

証明.　$S \in \mathcal{S}_{p,q}^{(n)}$ とする．S の（$\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ における）十分小さい近傍 U をとれば，固有値の連続性により，$S' \in U$ の符号 (p', q') に対して $p' \geqslant p$, $q' \geqslant q$ が成立する（p. 257 参照）．特に $S' \in U \cap \mathcal{S}_r^{(n)}$ ならば $p'+q'=r=p+q$ であるから，$p'=p$, $q'=q$．すなわち

$$U \cap \mathcal{S}_r^{(n)} \subset \mathcal{S}_{p,q}^{(n)}.$$

これは $\mathcal{S}_{p,q}^{(n)}$ が（$\mathcal{S}_r^{(n)}$ における）相対的開集合であることを示している．（証終）

次に

$$G^+ = \{ a \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid \det(a) > 0 \}$$

とおく．明らかに G^+ は $G = GL(n, \boldsymbol{R})$ の（位数２の）正規部分群である．

補題 2.　G^+ は連結である．

（この証明は次章にゆずる．）

定理の証明に戻り，仮定により $S_2 = aS_1{}^t a$ となる $a \in G$ が存在するが，ここで $a \in G^+$（すなわち，$\det(a) > 0$）と仮定してよい．実際，もし $\det(a) < 0$ ならば，$S_1 = a_1 1_{p_1,q_1}{}^{(n)}\, {}^t a_1$ とし，$a' = aa_1 1_{n-1,1}{}^{(n)} a_1^{-1}$ とおけば，$S_2 = a' S_1{}^t a'$ で $\det(a') = -\det(a) > 0$．よって a を a' でおきかえればよい．このことは $GS_1 = G^+ S_1$ を意味する．

さて (14), (15) により

$$\mathcal{S}_{p_1,q_1}{}^{(n)} \subset GS_1 = G^+ S_1 \subset \mathcal{S}_r^{(n)}$$

であるが，もし $\mathcal{S}_{p_1,q_1}{}^{(n)} \neq GS_1$ ならば

$$(*)\qquad GS_1 = \mathcal{S}_{p_1,q_1}{}^{(n)} \cup (GS_1 \cap (\mathcal{S}_r^{(n)} - \mathcal{S}_{p_1,q_1}{}^{(n)}))$$

となり，$GS_1 \cap (\mathcal{S}_r^{(n)} - \mathcal{S}_{p_1,q_1}{}^{(n)}) \neq \phi$．ここで

$$\mathscr{S}_r^{(n)} - \mathscr{S}_{p_1,q_1}^{(n)} = \bigcup_{\substack{p+q=r \\ p \neq p_1}} \mathscr{S}_{p,q}^{(n)}$$

であるから，補題1により，（＊）は GS_1 の二つの空でない相対開集合への分解を与える．一方，補題2により $GS_1 = G^+S_1$ は連結集合 G^+ の連続像（写像 $a \longmapsto aS_1{}^t a$ による）だから連結でなければならない．これは矛盾である．よって $\mathscr{S}_{p_1,q_1}^{(n)} = GS_1$．$S_2 \in GS_1$ であるから，$p_1 = p_2$, $q_1 = q_2$ を得る．（証終）

この定理により，$\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ の G-オービット分解が

(16) $$\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R}) = \coprod_{\substack{p \geqslant 0,\, q \geqslant 0 \\ p+q \leqslant n}} \mathscr{S}_{p,q}^{(n)}$$

によって与えられることがわかった．この分解の代表系としては

$$\{ 1_{p,q}^{(n)} \mid p \geqslant 0,\ q \geqslant 0,\ p+q \leqslant n \}$$

をとることができる．これが“シルベスターの符号律”の幾何学的意味である．

練習問題．$\mathscr{S}_{p,q}^{(n)}$ の閉包は $\mathscr{S}_{p_1,q_1}^{(n)}$ $(p_1 \leqslant p,\ q_1 \leqslant q)$ の和集合であることを示せ．

6. 交代行列の場合

もう一つの部分空間 $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ の G-オービット分解はより簡単に得られる．すなわち次の定理が成立する．

定理 2. 交代行列の階数は必ず偶数である．二つの n 次交代行列 A_1, A_2 が（例7の意味で）G-同値になるためには $\mathrm{rank}\, A_1 = \mathrm{rank}\, A_2$ となることが必要十分である[†)]．

したがって

$$\mathscr{A}_p^{(n)} = \{ A \in \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R}) \mid \mathrm{rank}\, A = 2p \}$$

とおけば，$\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ のオービット分解は

(17) $$\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R}) = \coprod_{0 \leqslant p \leqslant n/2} \mathscr{A}_p^{(n)}$$

---

†) 「線型代数学」p. 186.

によって与えられる．この定理の証明は後に述べる（第10章）が，面白いことは定理1の証明には実数の性質（順序，連続性等）を本質的に使ったのに対し，定理2の方は純代数的に，ということは実数体ばかりでなく（標数2でない）任意の体の上で，証明されることである．さらに定理1にそれと類似の“代数的”定式化を与えることも可能である（Witt の定理）．これらのことを説明する前に，まずいろいろな直交群とそのカルタン分解について述べることにしよう．

第8章　いろいろな直交群（そのカルタン分解）

1. $\mathcal{S}^{(n)}$ のオービット分解

前章では変換群の例として $G=GL(n, \boldsymbol{R})$ の $\mathcal{S}^{(n)}=\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ への作用について説明した．$\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ は n 次実対称行列全体の作る $\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 次元ベクトル空間を表わす．$S\in\mathcal{S}^{(n)}$ で“符号”が (p, q) のもの全体が作る部分集合（線形部分空間ではない）を $\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}$，特に $p+q=n$ のときには単に $\mathcal{S}_{p,q}$，とかく．G は $\mathcal{S}^{(n)}$ に

$$\rho_g' : S\longmapsto gS{}^tg \qquad (g\in G,\ S\in\mathcal{S}^{(n)})$$

によって作用し，それに関する $\mathcal{S}^{(n)}$ のオービット分解が

$$\mathcal{S}^{(n)}=\coprod_{\substack{p,q\geqslant 0\\ p+q\leqslant n}}\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)} \tag{1}$$

で与えられるのであった．

ここでまず各オービット $\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}$ が“錐体”になっていることに注意しておく．一般にユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の部分集合 M が（原点 O を頂点とする）**錐体**であるとは条件

$$x\in M,\ \lambda\in\boldsymbol{R}^+\Longrightarrow\lambda x\in M \tag{C}$$

が成立することをいう（図 1）．（$\boldsymbol{R}^+$ は正の実数全体の集合を表わす．）M が錐体ならば

$$-M=\{-x\mid x\in M\}$$

も一つの錐体である．$\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}$ が錐体になることは定義から明らかだろう．また $-\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}=\mathcal{S}_{q,p}{}^{(n)}$ となることも明白である．

(1) のオービットの中で特に $\mathcal{S}_{n,0}{}^{(n)}$，すなわち“正定値”（positive de-

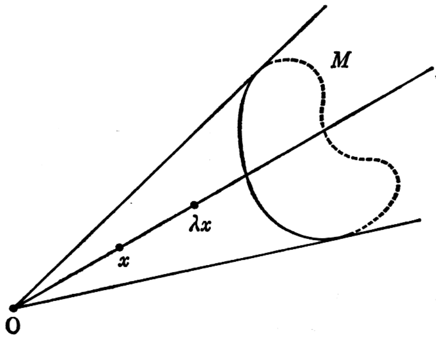


図 1

finite) 対称行列全体の作るオービットが大切である．これを $\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_n(\boldsymbol{R})$ とかく．$\mathcal{P}^{(n)}$ は“凸な錐体”になっている．一般に $\boldsymbol{R}^N$ の部分集合 M が**凸**であるとは，

(C′)　　$x, y \in M,\ \lambda \in \boldsymbol{R},\ 0 < \lambda < 1 \Longrightarrow \lambda x + (1-\lambda)y \in M$

であることをいう（図 2）．したがって**凸な錐体**とは

(CC)　　$x, y \in M,\ \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}^+ \Longrightarrow \lambda x + \mu y \in M$

であるような集合をいう（図 3）．

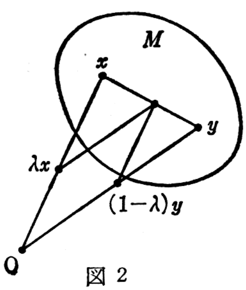


図 2

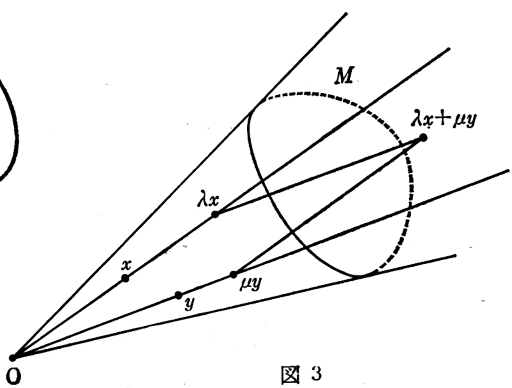


図 3

$\mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{S}_{n,0}{}^{(n)}$ ばかりでなく，$\mathcal{S}_{p,0}{}^{(n)}$, $\mathcal{S}_{0,q}{}^{(n)}$ 等はいずれも凸錐体である．（しかしそれ以外の $\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}$, $p > 0$, $q > 0$ は実際凸ではない．それはなぜか？）

2. 固定部分群としての直交群

$S \in \mathcal{S}^{(n)}$ の固定部分群を S に関する直交群といい，G_S とかく：

$$G_S = \{ g \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid gS{}^tg = S \}. \tag{2}$$

"普通の" 直交群 $O(n)$ は G_{1_n} に他ならない．一般に

$$1_{p,q}{}^{(n)} = \begin{pmatrix} 1_p & & 0 \\ & -1_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

に関する直交群を $O(n\,;p,q)$，特に $p+q=n$ のとき単に $O(p,q)$，とかく．ここで p,q を変えればいろいろな直交群が得られることになる．例えば $O(2,1)$, $O(3,1)$ は相対論に出てくる "ローレンツ (Lorentz) 群" である．このような一般の直交群の構造について考えてみることにしよう．

まず (G に関して) 同値な二つの対称行列 S, S' に対する直交群 $G_S, G_{S'}$ は (G の中で) "共役"，したがって同型になることに注意しておこう．一般に群 G の二つの部分群 H, H' はある $g_1 \in G$ があって $H' = g_1{}^{-1}Hg_1$ となっているとき，互に**共役** (conjugate) であるという．そのとき，H と H' は対応

$$H \ni h \longmapsto h' = g_1{}^{-1}hg_1 \in H'$$

によって同型になる．(この対応は G の "内部自己同型" $\nu_{g_1^{-1}}$ を H に制限したものである.) 特に G がリー群，H, H' がその (閉) リー部分群であるときには，この対応は H から H' の上への解析同型を与える．したがって H と H' はリー群としてまったく同じ構造をもつ．

さて，$S, S' \in \mathcal{S}^{(n)}$, $S \underset{G}{\sim} S'$ とすれば，ある $g_1 \in G$ があって $S = g_1S'{}^tg_1$ となる．よって $g \in G$ に対し

$$\begin{aligned} g \in G_S &\iff gS{}^tg = S, \quad \text{i.e.} \quad gg_1S'{}^tg_1{}^tg = g_1S'{}^tg_1 \\ &\iff (g_1{}^{-1}gg_1)S'{}^t(g_1{}^{-1}gg_1) = S' \\ &\iff g_1{}^{-1}gg_1 \in G_{S'}. \end{aligned}$$

よって

$$G_{S'} = g_1{}^{-1}G_Sg_1 \tag{4}$$

となり，G_S と $G_{S'}$ は（G の中で）共役である．

$S \in \mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}$ とすれば，$S \underset{G}{\sim} 1_{p,q}{}^{(n)}$ であるから，G_S は $O(n;p,q)$ と共役，したがって解析同型になる．よって一般の直交群 G_S の構造をしらべるためには $O(n;p,q)$ をしらべればよいことになる．もちろん $\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}$ の他の代表元 S_1 をとって G_{S_1} をしらべてもよい．

3. $\mathbf{Sym}_n(\boldsymbol{R})$, $\mathbf{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ における指数関数

$G = GL(n, \boldsymbol{R})$ のリー環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \boldsymbol{R})$（$n$ 次実行列全体の作るリー環）はベクトル空間として

$$\mathfrak{g} = \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R}) + \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R}) \tag{5}$$

と直和分解される．$\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ は n 次実交代行列全体の作る部分リー環である．（$\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ の方は部分リー環ではない．）我々は準備としてこれら部分空間の上での指数写像 exp の性質をしらべてみよう．

今，$X \in \mathcal{S}^{(n)} = \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$, $x = \exp X$ とすれば，x は $\mathcal{P}^{(n)}$ に属する．実際，よく知られた定理により

$$X = T^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T \qquad (T \in O(n),\ \lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \boldsymbol{R}) \tag{6}$$

とかける．よって

$$x = \exp X = T^{-1} \exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} T = T^{-1}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix} T.$$

よって x も対称でその固有値はすべて正，すなわち $x \in \mathcal{P}^{(n)}$ である．

補題 1.　指数写像 exp は $\mathcal{S}^{(n)} = \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ から $\mathcal{P}^{(n)}$ の上への1対1対応を与える．

これは前にもいった線形代数の“練習問題”であるが，以下の議論の基礎になるので一応証明しておく．

まず $\exp : \mathcal{S}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{P}^{(n)}$ が上への写像であることをいう．任意の $x \in \mathcal{P}^{(n)}$ は

$$(7) \qquad x = T^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} T \qquad (T \in O(n),\ \mu_i > 0)$$

と表わされる．よって $\lambda_i = \log \mu_i (\in \boldsymbol{R})$ とし，X を (6) で定義すれば，$x = \exp X$ となる．次にこのような X の一意性をいうために，$V = \boldsymbol{R}^n$ とし，一般に V の一次変換 φ と $\lambda \in \boldsymbol{R}$ に対し，φ の λ に対する（狭い意味の）"固有空間"

$$\{ v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v \}$$

を $V(\varphi; \lambda)$ とかくことにする．今 $x = \exp X$ とし，X の固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ のうち相異なるものを（適当に番号をつけかえて）$\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ とすれば，(6) は V が

$$(8) \qquad V = \bigoplus_{i=1}^{s} V(X; \lambda_i) \qquad \text{（直交和）}$$

と直和分解されることを意味する．$v \in V(X; \lambda_i)$, i.e. $Xv = \lambda_i v$ とすれば，

$$xv = (\exp X)v = e^{\lambda_i} v$$

であるから，$v \in V(x; e^{\lambda_i})$．［$Xv = \lambda_i v$ から $X^\nu v = \lambda_i^\nu v$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$．したがって $(\exp X)v = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} X^\nu v = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \lambda_i^\nu v = e^{\lambda_i} v$ を得る．］よって

$$V(X; \lambda_i) \subset V(x; e^{\lambda_i}).$$

しかし実際にはここで等号が成立する．なぜなら，$\dim V(X; \lambda_i)$, $\dim V(x; e^{\lambda_i})$ はそれぞれ X, x の固有値 λ_i, e^{λ_i} の重複度に等しく，一方明らかに（写像 $\lambda \longmapsto e^\lambda$ が 1 対 1 であることから）λ_i の重複度は e^{λ_i} のそれに等しい．よって $\dim V(X; \lambda_i) = \dim V(x; e^{\lambda_i})$ となる．このように x によって X の固有値，およびその固有空間は一意的に定まる．よって X 自身も一意的に決まってしまう．（証終）

補題 2. 指数写像 exp は $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ から $SO(n)$ の上への写像を与える．

証明. $X \in \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ とすれば，$x = \exp X \in SO(n)$ であることは以前に述べた．x の（複素数の）固有値の一つを ζ とすれば，ある複素ベクトル $v \in \boldsymbol{C}^n$, $v \neq 0$ があって

$$(9) \qquad xv = \zeta v.$$

両辺の複素共役をとり（x が実であることに注意して）

$$x\bar{v} = \bar{\zeta}\bar{v},$$

すなわち，$\bar{\zeta}$ も固有値である．よって v を縦ベクトルとみて，$x \in O(n)$ に注意して

$$\begin{aligned} {}^t(xv)(x\bar{v}) &= {}^tv\,{}^txx\bar{v} = {}^tv\bar{v} \\ &= {}^t(\zeta v)(\bar{\zeta}\bar{v}) = (\zeta\bar{\zeta})({}^tv\bar{v}). \end{aligned}$$

${}^tv\bar{v} \neq 0$ であるから，$\zeta\bar{\zeta} = 1$ でなければならない．また x の固有値は互に共役なものが一対になって現われている．したがってその全体を（重複も許して）$\zeta_1, \bar{\zeta}_1, \zeta_2, \bar{\zeta}_2, \cdots, \zeta_s, \bar{\zeta}_s, -1, \cdots, -1, 1, \cdots, 1$ とかくことができる．ここで，$\det(x) = 1$ だから，-1 の重複度は偶数，したがって ζ_i の中に -1 も含めておくことができる．よって

$$x \sim \begin{pmatrix} \zeta_1 & & & & & & & 0 \\ & \bar{\zeta}_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \zeta_s & & & & \\ & & & & \bar{\zeta}_s & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

としてよい．（$\sim$ は複素行列のはんい，すなわち $GL(n, C)$ での共役を表わす.）$\zeta_i = e^{\sqrt{-1}\theta_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$ とすれば

$$\begin{pmatrix} \zeta_i & 0 \\ 0 & \bar{\zeta}_i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

であるから，実行列のはんいで

$$x = T^{-1} \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & & & & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & 1 \end{pmatrix} T \tag{10}$$

とかける．ここで上記 $\sim$ を与える底の変換をしらべてみればわかるように，$T \in O(n)$ にとることができる[†]．よって

(11)
$$X = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -\theta_1 & & & 0 \\ \theta_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ 0 & & & & \ddots\ 0 \end{pmatrix} T$$

とおけば，$X \in \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ で $x = \exp X$ となる．(証終)

[この場合，$\exp : \mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R}) \longrightarrow SO(n)$ は1対1ではない．もしそうなら $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ と $SO(n)$ は同相になってしまうが $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ はコンパクトでないからこれは矛盾．補題1の証明では $\lambda \longmapsto e^{\lambda}$ が1対1であることが本質的であったがこれに当ることは複素数のはんいでは成立しない．実際虚数軸の上で $i\theta \longmapsto e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ は周期関数である！]

補題1により

(12)
$$\mathcal{P}^{(n)} \approx \mathcal{S}^{(n)} \approx \boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)} \qquad \text{(解析同相)}$$

である．ここでついでに

(13)
$$S\mathcal{P}^{(n)} = \{\, x \in \mathcal{P}^{(n)} \mid \det(x) = 1 \,\}$$

をも考えてみよう．$X \in \mathcal{S}^{(n)}$, $x = \exp X$ とし (6) のように X の固有値を $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ とすれば

$$\det(x) = \prod e^{\lambda_i} = e^{\sum \lambda_i} = e^{\mathrm{tr}(X)}$$

であるから，$\det(x) = 1 \iff \mathrm{tr}(X) = 0$. よって $S\mathcal{P}_n$ は

$$\{\, X \in \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0 \,\} \approx \boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$$

の exp による像であり，それと解析同相になる．

系 1. $x \in \mathcal{P}^{(n)}$ に対し $x_1 \in \mathcal{P}^{(n)}$, $x_1^2 = x$ となるような x_1 が一意的に存在する．($x_1 = x^{1/2}$ とかく．)

証明． まず一意性をいう．上記のような x_1 が存在したとし，$x = \exp X$, $x_1 = \exp X_1$, $X, X_1 \in \mathcal{S}^{(n)}$ とおけば

$$x = x_1^2 = \exp(2X_1).$$

よって $\exp : \mathcal{S}^{(n)} \longrightarrow \mathcal{P}^{(n)}$ が1対1であることから，$X = 2X_1$，すなわち

---

†) 「線型代数学」p. 171.

$X_1=\dfrac{1}{2}X$ となる．よって x_1 は一意的に定まる．逆に $x_1=\exp\left(\dfrac{1}{2}X\right)$ とおけば，明らかに $x_1{}^2=x$ が成立する．（証終）

$\mathcal{S}^{(n)}$ における写像 $X\longmapsto\dfrac{1}{2}X$ が連続（解析的）であるから，$\mathcal{P}^{(n)}$ における写像 $x\longmapsto x^{1/2}$ も連続（解析的）である．（$x_1\in\mathcal{P}^{(n)}$ と制限しなければ，$x_1{}^2=x$ となる x_1 は一般に無限個存在する！）

系 2.　$SO(n)$ は連結である．

なぜなら補題2によりそれは連結集合 $\mathrm{Alt}_n(\boldsymbol{R})$ の連続像となるから．

4. G のカルタン分解

$G=GL(n,\boldsymbol{R}),\ K=O(n)$ とおく．

定理 1.　G の元 g は

(14)　$$g=kp,\qquad k\in K,\qquad p\in\mathcal{P}^{(n)}$$

と一意的に表わされる．

証明. まず例によって一意性から始める．もし (14) のような分解があれば，${}^tk=k^{-1}$, ${}^tp=p$ に注意して

$$ {}^tgg={}^tp\,{}^tkkp=p^2\quad(\in\mathcal{P}^{(n)}).$$

よって補題の系1により，$p=({}^tgg)^{1/2}$ は一意的に定まる．したがって $k=gp^{-1}$ も定まる．——分解の可能性も上記から明らかなように，$p=({}^tgg)^{1/2}$, $k=gp^{-1}$ とおくことによって得られる．（証終）

定理1により写像

(15)　$$\begin{aligned}K\times\mathcal{P}^{(n)}&\longrightarrow G\\(k,p)&\longmapsto g=kp\end{aligned}$$

は全単射であり，明らかに連続（解析的）だが，上の構成からわかるように逆写像 $g\longmapsto(k,p)$ も連続（解析的）である．よって (15) の対応により

(16)　$$G=K\mathcal{P}^{(n)}\approx K\times\mathcal{P}^{(n)}\qquad\text{（解析同相）}$$

となる．この分解を G の**カルタン** (Cartan) **分解**という．

(12) により $\mathcal{P}^{(n)}\approx\boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ であるから，G は位相的（解析的）にはコンパクト集合 $K=O(n)$ とユークリッド空間との直積になっている．

今

$$G^+ = \{\, g \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid \det(g) > 0 \,\}$$

とおく．G^+ は G の開（したがって閉）部分群で，$g \in G$ を (14) のようにかいたとき，

$$\det(g) = \det(k)\det(p),$$
$$\det(k) = \pm 1, \quad \det(p) > 0$$

であるから

$$g \in G^+ \Longleftrightarrow \det(k) = 1, \ \text{i.e.}\ k \in SO(n),$$

また

$$g \in SL(n, \boldsymbol{R}) \Longleftrightarrow \det(k) = 1, \ \det(p) = 1,$$
$$\text{i.e.}\ k \in SO(n),\ p \in S\mathcal{P}^{(n)}.$$

よって (16) の対応により

(17) $$G^+ = SO(n)\cdot\mathcal{P}^{(n)} \approx SO(n)\times\mathcal{P}^{(n)},$$

(18) $$SL(n, \boldsymbol{R}) = SO(n)\cdot S\mathcal{P}^{(n)} \approx SO(n)\times S\mathcal{P}^{(n)}.$$

これが G^+ と $SL(n, \boldsymbol{R})$ の“カルタン分解”である．補題の系2により $SO(n)$ は連結，また $S\mathcal{P}^{(n)} \approx \boldsymbol{R}^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ だから，G^+ や $SL(n, \boldsymbol{R})$ も連結である．（これで以前からの宿題が一つ解決した．）

またカルタン分解の結果として $K = O(n)$ が G の中の“極大コンパクト部分群”であることがいえる．すなわち $K \subsetneqq K' \subset G$ であるようなコンパクト部分群 K' は存在しない．実際，もしそのような K' が存在すれば，$g \in K'$, $g \notin K$ となるような元 g が存在する．$g = kp$ と分解すれば，$k \in K \subset K'$，したがって $p \neq 1_n$, $p = k^{-1}g \in K'$ である．p の巾(べき) p^ν $(\nu = 1, 2, \cdots)$ を考えれば，K' がコンパクトだから点列 $\{p^\nu\}$ は収束する部分列 $\{p^{\nu_j}\}$ をもつ．しかし

$$p = T^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} T \qquad (\mu_i > 0)$$

とすれば

$$p^{\nu} = T^{-1}\begin{pmatrix} \mu_1{}^{\nu} & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n{}^{\nu} \end{pmatrix} T.$$

$p \neq 1_n$ だから，ある $\mu_i \neq 1$，したがって $\mu_i{}^{\nu} \to 0$ または $\mu_i{}^{\nu} \to \infty$ となり $\lim p^{\nu_j}$ は G の中には存在しない．これは矛盾である．——同様に $SO(n)$ は G^+ や $SL(n, \boldsymbol{R})$ の中で極大コンパクト部分群である．

［さらに $G, G^+, SL(n, \boldsymbol{R})$ 等の中で極大コンパクト部分群はすべて共役であることがいえる．これは G の任意のコンパクト部分群が凸錐体 $\mathcal{P}^{(n)}$ の中に固定点をもつことから導かれる．］

5. 一般直交群のカルタン分解

$S \in \mathcal{S}^{(n)}$ に対し $K_S = K \cap G_S$，$\mathcal{P}_S = \mathcal{P}^{(n)} \cap G_S$ とおく．最初 S が可逆 $(\det(S) \neq 0)$ の場合を考える．

補題 3.　S が可逆ならば

(19)
$$ {}^tG_S = G_{S^{-1}}.$$

証明.　$g \in G_S$ とすれば $gS{}^tg = S$，よって ${}^tg^{-1}S^{-1}g^{-1} = S^{-1}$，すなわち ${}^tgS^{-1}g = S^{-1}$ であるから，${}^tg \in G_{S^{-1}}$．この逆もいえるから (19) を得る．（証終）

特に $S^2 = 1_n$ ならば (19) から ${}^tG_S = G_S$ となる．この場合，次の定理が成立する．

定理 2.　$S \in \mathcal{S}_{p,q}$，$S^2 = 1_n$ とすれば

(20)
$$G_S = K_S\mathcal{P}_S \approx K_S \times \mathcal{P}_S.$$

K_S は G_S の極大コンパクト部分群で，$O(p) \times O(q)$ と同型，$\mathcal{P}_S$ は pq 次元ユークリッド空間と同相である．［$p = 0$ または $q = 0$ ならば，$S = \pm 1_n$，したがって $G_S = K_S = O(n)$，$\mathcal{P}_S = \{1_n\}$ となる．］

まず K_S について考えよう．

$$\begin{aligned} K_S &= \{ g \in G \mid {}^tg = g^{-1},\ gS{}^tg = S \} \\ &= \{ g \in G \mid {}^tg = g^{-1},\ gSg^{-1} = S \} \end{aligned}$$

であるから

$$K_S = \{\, k \in K \mid kS = Sk \,\} \tag{21}$$

となる．$S \in \mathcal{S}_{p,q}$, $S^2 = 1_n$ であるから

$$S = T^{-1}1_{p,q}T \qquad (T \in O(n))$$

とかける．よって2で述べたように，$G_S = T^{-1}O(p, q)T$．したがって

$$\begin{aligned} K_S &= O(n) \cap T^{-1}O(p, q)T \\ &= T^{-1}(O(n) \cap O(p, q))T \end{aligned} \tag{22}$$

となる．(21) を $S = 1_{p,q}$ の場合に適用して

$$\begin{aligned} K_{1_{p,q}} &= O(n) \cap O(p, q) \\ &= \{\, g \in O(n) \mid g1_{p,q} = 1_{p,q}g \,\}. \end{aligned}$$

$g = \begin{pmatrix} g_1 & g_{12} \\ g_{21} & g_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}\, p \\ \}\, q \end{matrix}$ と小行列に分解すれば，簡単な計算でわかるように

$$g1_{p,q} = 1_{p,q}g \iff g_{12} = 0,\ g_{21} = 0,$$

さらに

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \in O(n) \iff g_1 \in O(p),\ g_2 \in O(q)$$

であるから

$$\begin{aligned} O(n) \cap O(p, q) &= \left\{ g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \middle|\, g_1 \in O(p),\ g_2 \in O(q) \right\} \\ &\cong O(p) \times O(q) \end{aligned} \tag{23}$$

となる．よって (22), (23) から

$$K_S \cong O(p) \times O(q) \tag{24}$$

である．(したがって $p > 0$, $q > 0$ ならば K_S は4個の連結成分をもつ．)

次に

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_S &= \{\, g \in G \mid {}^tg = g \gg 0,\ gS{}^tg = S \,\} \\ &= \{\, g \in G \mid {}^tg = g \gg 0,\ gSg = S \,\}. \end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{P}_S = \{\, p \in \mathcal{P}^{(n)} \mid SpS^{-1} = p^{-1} \,\} \tag{25}$$

である．今 $X \in \mathcal{S}^{(n)}$, $x = \exp X$ とすれば

$$SxS^{-1} = \exp(SXS^{-1}), \qquad x^{-1} = \exp(-X)$$

であるから，補題1により

$$x \in \mathcal{P}_S \Longleftrightarrow SxS^{-1} = x^{-1} \Longleftrightarrow SXS^{-1} = -X,$$

すなわち $\mathcal{P}_S$ は $\mathcal{S}^{(n)}$ の線形部分空間

$$\{ X \in \mathcal{S}^{(n)} \mid SX + XS = 0 \} \tag{26}$$

の指数写像による像である．［容易にわかるように $\mathfrak{g}_S = \mathrm{Lie}\, G_S = \{ X \in \mathfrak{g} \mid S^t X + XS = 0 \}$ であるから，上の部分空間 (26) を $\mathcal{S}^{(n)} \cap \mathfrak{g}_S$ とかくことができる．］

特に $S = 1_{p,q}$ のとき，$K_{1_{p,q}}$ についてやった（実際は やらなかった）と同様の計算で

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{(n)} \cap \mathfrak{g}_{1_{p,q}} &= \{ X \in \mathcal{S}^{(n)} \mid 1_{p,q}X + X1_{p,q} = 0 \} \\ &= \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ {}^tX_{12} & 0 \end{pmatrix} \middle| X_{12} \in M_{p,q}(\boldsymbol{R}) \right\} \end{aligned}$$

を得るから，前と同様

$$\mathcal{P}_S \approx \mathcal{P}_{1_{p,q}} \approx \boldsymbol{R}^{pq} \tag{27}$$

となる．

最後に (20) を証明しよう．$K_S \mathcal{P}_S \subset G_S$ は明らかだが，逆をいうためには $g \in G_S$ を $g = kp$ と分解したとき，$k \in K_S$, $p \in \mathcal{P}_S$ となることをいわなければならない．（これは自明ではない．）S に関する仮定から，$g \in G_S$ なら ${}^tg \in {}^tG_S = G_S$. よって ${}^tgg \in G_S \cap \mathcal{P}^{(n)} = \mathcal{P}_S$. 上記により ${}^tgg = \exp X$, $X \in \mathcal{S}^{(n)} \cap \mathfrak{g}_S$ とかけば

$$p = ({}^tgg)^{1/2} = \exp\left(\frac{1}{2}X\right) \in \mathcal{P}_S.$$

したがってまた $k \in K \cap G_S = K_S$ となって証明できた．

K_S が G_S の極大コンパクト部分群であることは G の場合と同様 (20) から導かれる．†)

†)　この場合，極大コンパクト部分群の共役性の証明はややむずかしい．これについては例えば S. Helgason [7], Ch. VI, §2 参照．

練習問題. カルタン分解 (20) から ($\dim K_S$, $\dim \mathfrak{p}_S$ を別々に計算して) $\dim G_S = \dfrac{1}{2}n(n-1)$ を証明せよ.

[これは複素数のはんいまで G_S を"係数拡大"すれば $G_S\,(\det(S) \neq 0)$ がすべて $GL(n, C)$ の中で共役になってしまうことを使えば自明.]

一般に $\det(S) \neq 0$ である S に対し, $S_1{}^2 = 1_n$ となるようなある S_1 (例えば $1_{p,q}$) があって $S \underset{G}{\sim} S_1$ であるから, G_{S_1} のカルタン分解を同型 $G_S \cong G_{S_1}$ によって G_S にうつすことにより G_S のカルタン分解が得られる. [一般に "reductive" な代数群に対しても同様な手続きでそのカルタン分解が得られる.]

$\det(S) = 0$ のときには G_S はカルタン分解をもたないが, $S = 1_{p,q}{}^{(n)}$ $(p+q < n)$ のとき, K_S はやはり G_S の極大コンパクト部分群となり, G_S は K_S とユークリッド空間の直積に分解される. また $p > 0$, $q > 0$, $p+q < n$ なら K_S (したがって G_S) は 8 個の連結成分をもつ. これらのことも読者の練習問題としておこう.

第9章　リー群の階数

前章では $G=GL(n,\boldsymbol{R})$ や一般の直交群 G_S のカルタン分解について説明した．まず G については

$$K=O(n),$$
$$\mathscr{S}^{(n)}=(n\text{ 次実対称行列の作るベクトル空間}),$$
$$\mathscr{P}^{(n)}=(\mathscr{S}^{(n)}\text{ の中で正値定符号のもの全体の作る部分集合})$$

とおくとき

$$(1)\qquad G=K\cdot\mathscr{P}^{(n)}\approx K\times\mathscr{P}^{(n)},\qquad \mathscr{P}^{(n)}\approx\mathscr{S}^{(n)}$$

となる．また $S\in\mathscr{S}^{(n)}$, $S^2=1_n$ に対して

$$G_S=\{\,g\in G\mid gS{}^tg=S\,\},$$
$$K_S=K\cap G_S,\qquad \mathscr{P}_S=\mathscr{P}^{(n)}\cap G_S,$$
$$\mathfrak{p}_S=\{X\in\mathscr{S}^{(n)}\mid SX+XS=0\,\}$$

とおけば

$$(2)\qquad G_S=K_S\cdot\mathscr{P}_S\approx K_S\times\mathscr{P}_S,\qquad \mathscr{P}_S\approx\mathfrak{p}_S$$

となる．(1),(2) における第二の $\approx$ は指数写像 exp による全単射

$$\begin{array}{ccc}\mathscr{S}^{(n)} & \longrightarrow & \mathscr{P}^{(n)}\\ \cup\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\cup\\ X & \longmapsto & \exp X\end{array}$$

およびそれを $\mathfrak{p}_S$ に制限したもの（の逆）によって得られる解析同相を表わす．したがって $\mathscr{P}^{(n)}$, $\mathscr{P}_S$ 等は位相空間としてユークリッド空間と同相である．

分解 (1), (2) において K, K_S 等は（コンパクトな）部分群であるが，$\mathscr{P}^{(n)}$, $\mathscr{P}_S$ 等は部分群ではない．しかしその中に含まれる部分群を考えることには意味がある．まず $\mathscr{P}^{(n)}$ の場合から始めよう．

1. $\mathcal{P}^{(n)}$ の極大部分群

$\mathcal{P}^{(n)}$ に含まれる部分群としては，まずその中の対角行列全体の作る群

$$\left\{ a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \middle| \alpha_i > 0 \right\} \tag{3}$$

が考えられる．この群を $A^{(n)}$ とかくことにしよう．$A^{(n)}$ は明らかに（G の）可換な閉部分群で，そのリー環は

$$\mathfrak{a} = \left\{ x = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_n \end{pmatrix} \middle| \xi_i \in \boldsymbol{R} \right\} \cong \boldsymbol{R}^n$$

によって与えられる．したがってリー群として $A^{(n)} \cong \boldsymbol{R}^n$ である．これに関して次の定理を証明しよう．

定理 1. $\mathcal{P}^{(n)}$ に含まれる（閉）部分群 H はすべて $A^{(n)}$ の部分群に（直交行列に関して）共役である．特に H は可換で（それがリー部分群ならば）$\dim H \leqslant n$ である．

証明． まず H を $\mathcal{P}^{(n)}$ に含まれる任意の部分群とする．$x, y \in H$ とすれば，$xy \in H$. したがって x, y, xy は皆対称だから

$$xy = {}^t(xy) = {}^ty\,{}^tx = yx.$$

よって H は可換である．線形代数のよく知られた定理により，互に可換な対称行列の集合が与えられれば，ある一つの直交行列によりそれらを同時に対角化することができる[†]．このことを H に適用すれば，ある直交行列 T があって，$T^{-1}xT$ $(x \in H)$ はすべて対角行列になる．$x \in H$ $(\subset \mathcal{P}^{(n)})$ の固有値は正だから

$$T^{-1}HT = \{ T^{-1}xT \ (x \in H) \} \subset A^{(n)}.$$

これで定理の前半は証明された．特に H が閉部分群ならば

$$\dim H = \dim T^{-1}HT \leqslant \dim A^{(n)} = n$$

を得る．（証終）

---

†) 「線型代数学」, p. 156, 例 3.

この定理により $A^{(n)}$ は $\mathcal{P}^{(n)}$ に含まれる“極大部分群”であることがわかる．実際，もし

$$A^{(n)} \subset H \subset \mathcal{P}^{(n)}$$

となるような G の部分群 H があれば，上の定理により，ある $T \in K$ があって，$T^{-1}HT \subset A^{(n)}$．よって

$$T^{-1}A^{(n)}T \subset T^{-1}HT \subset A^{(n)}$$

となる．しかし $\dim T^{-1}A^{(n)}T = \dim A^{(n)}$ であるから，ここで等号が成立しなければならない．すなわち

$$T^{-1}A^{(n)}T = T^{-1}HT = A^{(n)},$$

よって $A^{(n)} = H$ である．

2. $\mathcal{P}_S$ の極大部分群

次に $G_S\,(S^2 = 1_n)$ の場合を考えよう．第一試行として $A^{(n)} \cap \mathcal{P}_S$ をとれば，これが $\mathcal{P}_S$ に含まれる（可換な）閉部分群であることは直ちにわかる．しかし果してそれは極大部分群であろうか？

まず $S = 1_{p,q}$ の場合を考えてみる．

$$\mathcal{P}_S = \{\, p \in \mathcal{P}^{(n)} \mid SpS = p^{-1} \,\}$$

であるから

(4)　　$$A^{(n)} \cap \mathcal{P}_S = \{\, a \in A^{(n)} \mid SaS = a^{-1} \,\}.$$

$S = 1_{p,q}$ のときには

$$a \in A^{(n)} \cap \mathcal{P}_S \Longrightarrow 1_{p,q}a1_{p,q} = a = a^{-1} \Longrightarrow a^2 = 1_n.$$

$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}$, $\alpha_i > 0$ であるから，$\alpha_i = 1$, $a = 1_n$ となる．すなわち $A^{(n)} \cap \mathcal{P}_S = \{1_n\}$ となってしまう．——これは明らかに失敗である．[任意の $X \in \mathfrak{p}_S$ に対しそれが生成するワン・パラメーター群 $\{\exp(\lambda X)\ (\lambda \in \boldsymbol{R})\}$ は確かに $\mathcal{P}_S$ に含まれる部分群であるから，極大部分群の次元は $\geqq 1$ でなければならない！]

けれども失敗は成功のもと，もう少し工夫してみることにしよう．まず簡

単なことだが，一般に

$$S' = T_1 S {}^t T_1 \qquad (T_1 \in O(n))$$

ならば，

$$\mathcal{P}_{S'} = T_1 \mathcal{P}_S {}^t T_1 = T_1 \mathcal{P}_S T_1^{-1} \tag{5}$$

であることに注意する．[実際，$p' = T_1 p {}^t T_1$ とおけば，${}^t T_1 = T_1^{-1}$ により

$$S' p' S' = p'^{-1} \Longleftrightarrow (T_1 S {}^t T_1)(T_1 p {}^t T_1)(T_1 S {}^t T_1) = (T_1 p {}^t T_1)^{-1}$$
$$\Longleftrightarrow SpS = p^{-1}.$$

よって (5) を得る．]

したがって $\mathcal{P}_{S'}$ に含まれる部分群 H' があれば，$H = T_1^{-1} H' T_1$ は $\mathcal{P}_S$ の部分群になる．特に H' が $\mathcal{P}_{S'}$ の中の極大部分群ならば，対応する H は $\mathcal{P}_S$ の中の極大部分群になる．そこで S を適当に ($O(n)$ に関して) 同値な S' でおきかえて $A^{(n)} \cap \mathcal{P}_{S'}$ が極大部分群になるようにできないだろうか？

まず一番簡単な $n = 2$, $p = q = 1$, $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ の場合をしらべてみる．

$$T_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

とすれば，$T_1 = {}^t T_1 = T_1^{-1}$ で

$$\begin{aligned} S' &= T_1 S {}^t T_1 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim S' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6}$$

さて $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_{12} \\ x_{12} & x_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{p}_{S'}$ とすれば，条件 $S' x S' = x^{-1}$ から

$$(xS')^2 = \begin{pmatrix} x_{12} & x_1 \\ x_2 & x_{12} \end{pmatrix}^2 = 1_2.$$

よって

$$x_{12}{}^2+x_1x_2=1, \qquad x_1x_{12}=x_2x_{12}=0.$$

$x_1>0$, $x_2>0$ であるから，$x_{12}=0$, $x_1x_2=1$ を得る．したがって

$$\mathcal{P}_{S'}=\left\{\begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_1{}^{-1}\end{pmatrix}\middle| x_1>0\right\}.$$

この場合，$\mathcal{P}_{S'}$ 自身が部分群になり，しかも $A^{(2)}\frown\mathcal{P}_{S'}$ と一致する．よって $A^{(2)}\frown\mathcal{P}_{S'}$ は確かに極大部分群になっている．

一般の場合，$p\geqq q$ とすれば，（上記 T_1 と類似の）直交行列による変換により

$$(7) \qquad 1_{p,q}=\begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q\end{pmatrix}\sim S'=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_q \\ 0 & 1_{n-2q} & 0 \\ 1_q & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

そのとき $a=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n\end{pmatrix}\in A^{(n)}$ に対し

$$a\in\mathcal{P}_{S'} \Longleftrightarrow S'aS'=\begin{pmatrix} \overbrace{\alpha_{n-q+1} \ \cdots \ \alpha_n}^{q} & & 0 \\ & \overbrace{\alpha_{q+1} \ \cdots \ \alpha_{n-q}}^{n-2q} & \\ 0 & & \overbrace{\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_q}^{q} \end{pmatrix}$$

$$=a^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_1{}^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n{}^{-1}\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha_{n-q+1}=\alpha_1{}^{-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_n=\alpha_q{}^{-1}, \\ \alpha_{q+1}=\cdots\cdots=\alpha_{n-q}=1. \end{cases}$$

よって

$$(8)\qquad A^{(n)}\cap\mathcal{P}_S=\left\{a=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & & \\ & & \alpha_q & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \alpha_1^{-1} & \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & \alpha_q^{-1}\end{pmatrix}\middle|\alpha_i>0\right\}.$$

これは q 次元の部分群である．($p\leqslant q$ のときは同様にして p 次元の部分群が得られる．しかし同じことだから以下 $p\geqslant q$ と仮定しておく．)

上記の $A^{(n)}\cap\mathcal{P}_{S'}$ は十分大きい部分群であるらしい．実際それが $\mathcal{P}_{S'}$ の中で極大であることを直接証明することはそうむずかしくはない．我々はもっと強く，定理1を一般化した形で証明することにしよう．すなわち

定理 2. S' を (7) のようにとるとき，$\mathcal{P}_{S'}$ に含まれる任意の部分群 H は $A^{(n)}\cap\mathcal{P}_{S'}$ の部分群に $K_{S'}$ の元に関して共役である．(特に $A^{(n)}\cap\mathcal{P}_{S'}$ は極大部分群で，$\mathcal{P}_{S'}$ に含まれるすべての極大部分群は互に共役である．)

この証明は普通はリー群ないし代数群の中のトーラスに関する一般論から(特別の場合として) 導かれる．しかしここではより初等的な証明を与えることにしよう．それは本質的に線形代数だけにもとづくものだから，読者も以下を読まれる前に自分で証明を考えてみられることをおすすめする．

3. $\mathcal{P}^{(n)}$ の K-オービット分解

$k\in K=O(n)$ は $\mathcal{P}^{(n)}$ に

$$(9)\qquad \mathcal{P}^{(n)}\ni p\longmapsto kp{}^tk=kpk^{-1}\in\mathcal{P}^{(n)}$$

により作用している．前にも引用した線形代数の基本定理により，任意の $p\in\mathcal{P}^{(n)}$ は

$$(10)\qquad p=kak^{-1},\qquad a\in A^{(n)},\quad k\in K$$

と表わされる．すなわち，$p\underset{K}{\sim}a$ である．この定理を少し精密化して $\mathcal{P}^{(n)}$ の K に関するオービット分解を求めてみよう．

今，$\{1,2,\cdots,n\}$ の一つの“置換” σ に対し，ベクトルの成分にその置換を引起す一次変換：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ x_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$$

の行列を T_σ とかく．すなわち T_σ は $i=\sigma(j)$ であるような (i,j) に対する (i,j) 成分だけが1，他の成分はすべて0であるような行列である．そのとき

$$a=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \Longrightarrow T_\sigma a T_\sigma{}^{-1}=\begin{pmatrix} \alpha_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

（証明してごらんなさい．なお $T_\sigma T_\tau=T_{\tau\sigma}$ となることに注意．）T_σ は直交行列だから

$$a=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \underset{K}{\sim} \begin{pmatrix} \alpha_{\sigma(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{\sigma(n)} \end{pmatrix}.$$

与えられた $a\in A^{(n)}$ に対し，σ を適当にとれば

$$\alpha_{\sigma(1)} \geqslant \alpha_{\sigma(2)} \geqslant \cdots\cdots \geqslant \alpha_{\sigma(n)}$$

となるようにすることができる．したがって

$$(11)\qquad A_+{}^{(n)}=\left\{ a=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \middle| \alpha_1 \geqslant \cdots\cdots \geqslant \alpha_n>0 \right\}$$

とおけば，任意の $p\in\mathcal{P}^{(n)}$ は K に関してある $a\in A_+{}^{(n)}$ と同値（共役）である．しかもそのような a は p によって一意的に定まる．（$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ は p の固有値だから．）よって

$$(12)\qquad \mathcal{P}^{(n)}=\coprod_{a\in A_+{}^{(n)}} \{kak^{-1} \mid k\in K\}.$$

これが $\mathcal{P}^{(n)}$ の K に関するオービット分解である．

$p\in\mathcal{P}^{(n)}$ の表示 (10) において $a\in A_+{}^{(n)}$ と制限しても k の方は一意的には定まらない．別の表示

$$(10')\qquad p=k'ak'^{-1}\qquad (k'\in K)$$

があったとし，$k^{-1}k'=T$ とおけば

$$T \in K, \qquad Ta = aT,$$

いいかえれば T は K の a における“固定部分群” K_a（この場合特に“中心化群”ともいう）に属する．逆に任意の $T \in K_a$ をとり $k' = kT$ とおけば (10′) が成立する．よって (10) の形の表示をすべて求めるためには $a \in A_+^{(n)}$ の中心化群 K_a を決定すればよい．

今，$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \in A_+^{(n)}$ において，α_i のうち最初の n_1 個が相等しく，次の n_2 個がまた相等しく，というように $n_1, n_2, \cdots, n_s$ 個ずつ相等しいものに分かれたとする．すなわち

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = \cdots\cdots = \alpha_{n_1} = \beta_1, \\ &\alpha_{n_1+1} = \cdots\cdots = \alpha_{n_2} = \beta_2, \\ &\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\alpha_{n_1+\cdots+n_{s-1}+1} = \cdots\cdots = \alpha_n = \beta_s \\ &\quad (n_1+n_2+\cdots+n_s = n), \\ &\quad \beta_1 > \beta_2 > \cdots\cdots > \beta_s \end{aligned}$$

であるとすれば

$$a = \begin{pmatrix} \beta_1 1_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_s 1_{n_s} \end{pmatrix} \tag{13}$$

とかくことができる．これに対応して

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots\cdots & T_{1s} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ T_{s1} & \cdots\cdots & T_{ss} \end{pmatrix} \qquad (T_{ij} \text{ は } (n_i, n_j) \text{ 型行列})$$

と分解すれば，$aT = Ta$ から $\beta_i T_{ij} = T_{ij}\beta_j$．よって $i \neq j$ なら $T_{ij} = 0$．したがって T は

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_s \end{pmatrix}$$

の形でなければならない．しかも $T \in O(n)$ だから $T_i \in O(n_i)$ である．逆

にこのような T が K_a に属することは明らか．よって次の補題を得る．

補題 1.　a が (13) の形であるとすれば

$$K_a=\left\{T=\begin{pmatrix}T_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & T_s\end{pmatrix}\middle|\, T_i\in O(n_i)\right\}.$$

4. もう一つの補題（$\mathcal{P}_{S''}$ のオービット分解）

置換 $\sigma_0=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\cdots & n\\ n & n-1 & \cdots\cdots & 1\end{pmatrix}$ に対する行列 T_{σ_0} を特に $V^{(n)}$ とかくことにする．すなわち

$$V^{(n)}=\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}.$$

便宜上 (7) における S' を

$$S''=\begin{pmatrix}0 & 0 & V^{(q)}\\ 0 & 1_{n-2q} & 0\\ V^{(q)} & 0 & 0\end{pmatrix} \tag{14}$$

でおきかえる．（$S'\sim S''$ であることは明らかであろう．）そうすれば（同様の計算で）(8) のかわりに

$$A^{(n)}\cap\mathcal{P}_{S''}=\left\{a=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_q & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \alpha_q^{-1} \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}\middle|\,\alpha_i>0\right\} \tag{8'}$$

を得る．さらに

$$A_+^{(n)}\cap\mathcal{P}_{S''}=\left\{a=\begin{pmatrix}\alpha_1 & & & & & & 0\\ & \ddots & & & & & \\ & & \alpha_q & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \alpha_q^{-1} \\ & & & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & & & & \alpha_1^{-1}\end{pmatrix}\middle|\,\alpha_1\geqq\cdots\geqq\alpha_q\geqq 1\right\} \tag{15}$$

となって都合がよい．この S'' に関して次の補題が成立する．

補題 2. $p \in \mathcal{P}_{S''}$ の (10) の形の分解において $a \in A_+^{(n)}$ とすれば，$a \in A_+^{(n)} \cap \mathcal{P}_{S''}$ である．またこのとき $k \in K_{S''}$ ととることができる．

整理していい直せば，

仮定：$p \in \mathcal{P}_{S''}$, $p = kak^{-1}$, $k \in K$, $a \in A_+^{(n)}$.

結論：（i） $a \in \mathcal{P}_{S''}$，すなわち a は (15) の形．

（ii） ある $T \in K_a$ があって $kT \in K_{S''}$．すなわち

$$Ta = aT, \qquad kTS'' = S''kT.$$

（そのとき k を $k' = kT$ でおきかえればよい．）

証明．仮定 $p \in \mathcal{P}_{S''}$ により $S''pS'' = p^{-1}$．これに $p = kak^{-1}$ を代入して

$$S''kak^{-1}S'' = ka^{-1}k^{-1}.$$

これをかき直して

$$(S''k)a(S''k)^{-1} = (kV)(Va^{-1}V)(kV)^{-1} \tag{16}$$

とかくことができる．ただし $V = V^{(n)} = T_{\sigma_0}$．ここで

$$Va^{-1}V = \begin{pmatrix} \alpha_n^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_1^{-1} \end{pmatrix} \in A_+^{(n)},$$

また明らかに $S''k, kV \in K$ であるから，(10) の形の表示における $a \in A_+^{(n)}$ の一意性により

$$a = Va^{-1}V, \tag{17}$$

すなわち，$\alpha_i = \alpha_{n-i+1}{}^{-1}\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ を得る．よって

$$\alpha_1 \geqslant \cdots\cdots \geqslant \alpha_s > 1$$

であるとすれば，$s \leqslant \dfrac{n}{2}$ で

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_s & & & \\ & & & 1_{n-2s} & & \\ & & & & \alpha_s^{-1} & \\ & & & & & \ddots \\ 0 & & & & & \alpha_1^{-1} \end{pmatrix}$$

となる．(16), (17) により

$$T = (S''k)^{-1}(kV) \in K_a$$

であるから，補題1により

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & T_2 & \\ 0 & & T_3 \end{pmatrix}, \qquad T_1, T_3 \in O(s),\ T_2 \in O(n-2s)$$

とかける．(T_1, T_3 はもっと分解できるが，その必要はない．) 上式から

$$(18) \qquad k^{-1}S''k = TV = \begin{pmatrix} 0 & & T_1V^{(s)} \\ & T_2V^{(n-2s)} & \\ T_3V^{(s)} & & 0 \end{pmatrix}.$$

この行列は対称だから

$$(19) \qquad \begin{cases} T_3V^{(s)} = {}^t(T_1V^{(s)}), \\ T_2V^{(n-2s)} = {}^t(T_2V^{(n-2s)}) \end{cases}$$

でなければならない．今

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & 1_{n-2s} & \\ 0 & & 1_s \end{pmatrix}$$

とおけば，(19) により

$$TV = T^{(1)} \begin{pmatrix} 0 & & V^{(s)} \\ & T_2V^{(n-2s)} & \\ V^{(s)} & & 0 \end{pmatrix} {}^tT^{(1)}$$

を得る．よって対称行列 $T_2V^{(n-2s)}$ の“符号”を (p_1, q_1) とすれば，TV のそれは $(p_1+s,\ q_1+s)$ となる．(18) により $S'' \sim TV$ であるから

$$p = p_1+s, \qquad q = q_1+s,$$

特に $s \leqq q$. これで結論 (i) が証明された．

さらに

$$T_2V^{(n-2s)} = R_2 \begin{pmatrix} 0 & & V^{(q-s)} \\ & 1_{n-2q} & \\ V^{(q-s)} & & 0 \end{pmatrix} {}^tR_2, \qquad R_2 \in O(n-2s)$$

とし

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} 1_s & & 0 \\ & R_2 & \\ 0 & & 1_s \end{pmatrix}$$

とおけば

$$TV = T^{(1)}T^{(2)} \begin{pmatrix} 0 & & V^{(q)} \\ & 1_{n-2q} & \\ V^{(q)} & & 0 \end{pmatrix} {}^tT^{(2)}\,{}^tT^{(1)}$$

となる．よって $T' = T^{(1)}T^{(2)}$ とおけば，その作り方から明らかに $T' \in K_a$ で

$$k^{-1}S''k = TV = T'S''T'^{-1}.$$

よって $kT' \in K_{S''}$ となり，T' は結論 (ii) の要求をみたしている．これで証明が完成した．（証終）

一般に $k \in K_{S''}$, $p \in \mathcal{P}_{S''}$ ならば，明らかに $kpk^{-1} \in \mathcal{P}_{S''}$ であるから $K_{S''}$ は ((9) と同じ仕方で) $\mathcal{P}_{S''}$ に作用している．補題 2 から直ちにわかるように，この作用に関する $\mathcal{P}_{S''}$ のオービット分解は

(20) $$\mathcal{P}_{S''} = \coprod_{a \in A_+^{(n)} \cap \mathcal{P}_{S''}} \{\, kak^{-1} \mid k \in K_{S''} \,\}$$

によって与えられる．

5. 定理 2 の証明

定理 2 の証明まであと一歩である．そのために次の概念を使う．

$$a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix},\ a' = \begin{pmatrix} \alpha_1' & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n' \end{pmatrix} \in A^{(n)}$$

に対し

$$\alpha_i = \alpha_j \Longrightarrow \alpha_i' = \alpha_j'$$

が成立するとき，a' は a の**特殊化**であるという．$A^{(n)}$ の部分集合 M が与えられたとき，$a_0 \in M$ で，すべての $a \in M$ が a_0 の特殊化であるような元

を（もし存在すれば）M の**一般元**ということにする．

補題 3.　$A^{(n)}$ の任意の部分群は一般元をもつ．

（これは群論の簡単な練習問題だから，証明は読者に委ねることにする．）

さて定理2の証明であるが，S' のかわりに S'' の場合にやれば十分である．H を $\mathcal{P}_{S''}$ に含まれる部分群とすれば，定理1によりある $k\in K$ があって

$$k^{-1}Hk \subset A^{(n)}.$$

よって $p\in H$ は（同一の k により）

$$p = kak^{-1}, \qquad a\in A^{(n)}$$

と表わされる．補題3により $k^{-1}Hk$ の "一般元" a_0 をとり，$p_0 = ka_0k^{-1}$ とおく．適当な置換 σ をとり，k を kT_σ^{-1}, a_0 を $T_\sigma a T_\sigma^{-1}$ でおきかえることにより，$a_0\in A_+^{(n)}$ と仮定してよい．$p_0\in \mathcal{P}_{S''}$ であるから，補題2により，$a_0\in A_+^{(n)}\cap \mathcal{P}_{S''}$，また $T\in K_{a_0}$ があって $k' = kT\in K_{S''}$．a_0 が $k^{-1}Hk$ の一般元であるから補題1（の証明）により，すべての $a\in k^{-1}Hk$ に対し $T\in K_a$．よって $k'^{-1}Hk' = k^{-1}Hk \subset A^{(n)}$．また $k'\in K_{S''}$, $H\subset \mathcal{P}_{S''}$ から $k'^{-1}Hk' \subset \mathcal{P}_{S''}$．よって

$$k'^{-1}Hk' \subset A^{(n)}\cap \mathcal{P}_{S''}.$$

これですべて証明できた！

定理 1, 2 により $\mathcal{P}^{(n)}$, $\mathcal{P}_{S''}$（したがって一般に $\mathcal{P}_S$）に含まれる極大部分群の次元は一定であり，それぞれ n, q（一般に $\mathrm{Min}(p, q)$）であることがわかる．これをそれぞれ $G, G_{S''}$（一般に G_S）の**階数**という．上に述べたことおよび極大コンパクト部分群の共役性を使えば，階数はこれらの群の行列表示には関係なく，いつでもその対角化可能な部分群のうち極大なものの次元と一致していることがわかる．この観点から "階数" の概念を一般のリー群ないし代数群の場合にその極大対角化可能部分群の次元として拡張することができる．一方，微分幾何学的見地からは，階数を "対称空間" $\mathcal{P}^{(n)} = G/K$, $\mathcal{P}_S = G_S/K_S$ に含まれる "平坦な" 部分空間のうち極大なものの次元として特徴づけることもできる．これについてはまた後に説明したいと思う．

第10章　ウィットの定理とその応用
（シンプレクティック群）

この章では（リー群から少し離れるが）ウィット（Witt）の定理について説明する．これによって前に述べた二次形式の“符号”（第7章）やその直交群の“階数”（第9章）等の意味が一層はっきりすると思う．実際この定理は非常に一般的な形で述べられるので，二次形式の場合ばかりでなく，エルミット形式やそれに対応するユニタリー群等にも適用することができる．その一例としてこの章の終りに前から残っていた交代双一次形式とその同型群（シンプレクティック群）の場合に触れることにする．

1．一般の距離ベクトル空間

$S=(a_{ij})$ を n 次の実対称行列，S によって定義される（対称）双一次形式を

$$S(x, y) = {}^t xSy = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j \tag{1}$$

とする．［我々は $x=(x_i)$, $y=(y_i)\in \boldsymbol{R}^n$ を“列ベクトル”，すなわち $(n, 1)$ 型行列とみているのである．］(1) において $x=y$ とおけば，$S(x,x)$ は $x_1,\cdots,x_n$ に関する2次の斉次多項式（“2次形式”）になる．それをジーゲル（Siegel）に従って $S[x]$ とかくことにする：

$$S[x] = S(x, x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j. \tag{2}$$

n 次元の（列）ベクトル空間 $\boldsymbol{R}^n$ を V とおき，V と一つの対称双一次形式 S との組 (V, S) を考える．S が正値定符号ならば $|x| = S[x]^{\frac{1}{2}}$ によって V に“距離”が入り通常のユークリッド空間が得られることは周知であ

ろう．（ただし正規直交系を得るためには底の変換をしなければならない．）また S の符号が $(n-1,\ 1)$ ならば，いわゆるミンコウスキー空間になる．我々は (V, S) を"一般化された距離ベクトル空間"と考え，ユークリッド空間の場合と類似の幾何学的用語を使うことにする．

前に述べたように $G = GL(n, \boldsymbol{R})$ は対称行列の空間 $\mathcal{S}^{(n)} = \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ に作用している．今，$g \in G,\ x, y \in V,\ x' = gx,\ y' = gy$ とすれば

$$S(x', y') = S(gx, gy) = {}^t x {}^t g S g y.$$

よってジーゲル式に $S' = {}^t g S g = S[g]$ とかけば

$$S(x', y') = (S[g])(x, y)$$

となる．前章までは群の作用を左からの作用に統一するために便宜上 G が $S \longmapsto gS{}^t g = S[{}^t g]$ によって作用しているものと考えたが，今の場合には上記のような"右から"の作用 $S \longmapsto S[g]$ を考える方が自然であろう．特に (V, S) の自己同型群を

$$O(V, S) = \{\, g \in GL(V) \mid S[g] = S \,\} \tag{3}$$

で定義し，(V, S) の**直交群**と呼ぶ．［以前の記号では $O(V, S) = {}^t G_S$ である．］

2. アイソトロピック・ベクトル

以下，（行列）S は可逆であると仮定する．このとき双一次形式 $S(x, y)$，または2次形式 $S[x]$，は"非退化"であるという．このように仮定しても（ユークリッド空間の場合と異なり）$x \neq 0$ でも $S[x] = 0$ となることが起り得る．このようなベクトルを**アイソトロピック**（isotropic）という．長たらしいので isot. と略記する．例えば，$V = \boldsymbol{R}^2$，$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ のとき，二直線

$$x_1^2 - 2x_2^2 = (x_1 + \sqrt{2}\,x_2)(x_1 - \sqrt{2}\,x_2) = 0$$

の上の点（ベクトル）は（原点を除き）isot. である（図1）．

一般に V の線形部分空間 W に対し，その"直交空間"を

$$W^{\perp} = \{\, x \in V \mid S(x, y) = 0 \text{ for all } y \in W \,\}$$

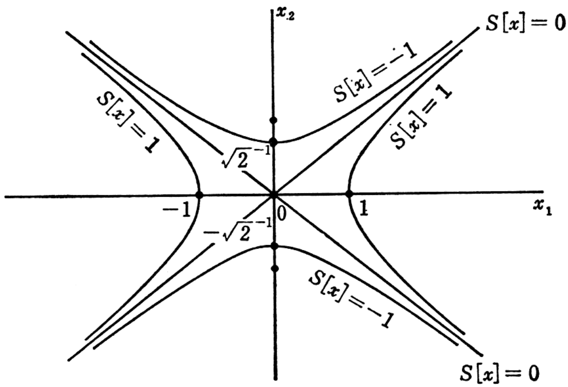


図 1　$S[x]=x_1^2-2x_2^2$

によって定義する．線形代数のよく知られた結果により

$$\dim W^{\perp}=n-\dim W \tag{4}$$

である†)．したがってもし $W\cap W^{\perp}=\{0\}$ ならば

$$V=W\oplus W^{\perp}$$

と（直交する）直和に分解され，S の W への制限（それを $S|W$ とかく）も非退化になる．簡単のため $W\cap W^{\perp}=\{0\}$ となるような部分空間 W を**正則**ということにする．$V^{\perp}=\{0\}$ だから，V 自身も正則である．

ユークリッド空間の場合にはすべての部分空間は正則であるが，一般には正則でないものもある．例えば，v を（0でない）isot. なベクトル，W を v が生成する1次元部分空間 $\{v\}_{\boldsymbol{R}}$ とすれば，$W\subset W^{\perp}$ となるから W は正則でない．一般に $W\subset W^{\perp}$ となるような部分空間を**全アイソトロピック** (totally isotropic)，略して t. isot. という．(4) からわかるように，W が t. isot. ならば

$$\dim W\leqq\frac{n}{2}$$

である．

補題 1.　$e_1,\cdots,e_m$ を V の一次独立なベクトルで

---

†) 「線型代数学」p. 101，定理 6 参照．一般に S が正値定符号でないときには，(S によって V と V^* とを同一視し) 同書 p. 197 の (9) を使えばよい．

(5a)　$$S(e_i, e_j) = 0 \qquad (i, j = 1, \cdots, m)$$

であるものとすれば，$e_1', \cdots, e_m' \in V$ で

(5b)　$$S(e_i, e_j') = \delta_{ij}, \qquad S(e_i', e_j') = 0 \qquad (i, j = 1, \cdots, m)$$

となるものが存在する（δ_{ij} はクロネカーのデルタ）．

証明に入る前に，もしこのようなベクトル系があれば $2m$ 個のベクトル $e_1, \cdots, e_m, e_1', \cdots, e_m'$ は一次独立で，かつそれらが生成する部分空間 $U = \{e_1, \cdots, e_m, e_1', \cdots, e_m'\}_{\boldsymbol{R}}$ は正則であることに注意しておく．［実際，

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i + \sum_{i=1}^{m} \eta_i e_i' \in U^\perp$$

とすれば (5a, b) から

$$0 = S(e_i, x) = \sum_j \xi_j S(e_i, e_j) + \sum_j \eta_j S(e_i, e_j') = \eta_i,$$

よって $\eta_i = 0$. 同様に $\xi_i = S(e_i', x) = 0$ を得る．よって $U \cap U^\perp = \{0\}$. 特に上記で始めから $x = 0$ とすれば，$e_1, \cdots, e_m'$ の一次独立性がでる.］

補題の証明.　m に関する帰納法でやる．

$m = 0$ のとき，何も証明することがない．（よって成立！）

$m \geqslant 1$ とし，$m-1$ まで成立しているとする．$\{e_m\}_{\boldsymbol{R}}$ の直交空間 $\{e_m\}_{\boldsymbol{R}}^\perp$ を考えれば，仮定 (5a) によりすべての $e_i\,(1 \leqslant i \leqslant m)$ は $\{e_m\}_{\boldsymbol{R}}^\perp$ に含まれる．よって $n-1-m$ 個のベクトル $x_1, \cdots, x_{n-1-m}$ をとり，$\{e_1, \cdots, e_m, x_1, \cdots, x_{n-1-m}\}$ が $\{e_m\}_{\boldsymbol{R}}^\perp$ の底になるようにすることができる．今

$$V_1 = \{e_1, \cdots, e_{m-1}, x_1, \cdots, x_{n-1-m}\}_{\boldsymbol{R}}$$

とおけば，V_1 は正則である．実際，$e_m \notin V_1$ だから，$V_1^\perp \not\subset \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}^\perp$. よって

$$\dim(V_1^\perp \cap \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}^\perp) < \dim V_1^\perp = 2.$$

しかし明らかに $e_m \in V_1^\perp \cap \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}^\perp$ だから

$$V_1^\perp \cap \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}^\perp = \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}.$$

したがって $V_1^\perp \cap V_1 = \{0\}$ である．ベクトル系 $e_1, \cdots, e_{m-1}$ は V_1 の中で補題の仮定をみたしているから，帰納法の仮定により，$e_1', \cdots, e_{m-1}' \in V_1$ で

$$S(e_i, e_j') = \delta_{ij}, \qquad S(e_i', e_j') = 0 \qquad (i, j = 1, \cdots, m-1)$$

となるものが存在する．そこで

$$U_1 = \{e_1, \cdots, e_{m-1}, e_1', \cdots, e_{m-1}'\}_{\boldsymbol{R}}$$

とおけば，証明の前に注意したように，U_1 も正則である．$U_1 \subset V_1 \subset \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}{}^{\perp}$ であるから，$U_1{}^{\perp} \not\subset \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}{}^{\perp}$ である．（もし $U_1{}^{\perp} \subset \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}{}^{\perp}$ ならば $V = U_1 + U_1{}^{\perp} \subset \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}{}^{\perp}$ となり矛盾．）よって $x \in U_1{}^{\perp}$, $x \notin \{e_m\}_{\boldsymbol{R}}{}^{\perp}$ であるような x をとることができる．

$$(*) \qquad e_m' = \lambda x + \mu e_m$$

とおき，λ, μ を適当に定めて

$$(**) \qquad S(e_m, e_m') = 1, \qquad S(e_m', e_m') = 0$$

となるようにすることができれば，$(e_1', \cdots, e_m')$ は (5b) のすべての条件をみたしているから証明が終る．

$$S(e_m, x) = \alpha \ (\neq 0), \qquad S(x, x) = \beta$$

とおけば，（*）から

$$S(e_m, e_m') = \lambda\alpha, \qquad S(e_m', e_m') = \lambda^2\beta + 2\lambda\mu\alpha.$$

よって

$$\lambda = \alpha^{-1}, \qquad \mu = -\beta/2\alpha^2$$

とおけば (**) が成立する．（証終）

3. ウィット分解

(V, S) を（正則な）一般距離ベクトル空間とし，V の t. isot. な部分空間のうち極大なもの W を一つとる．［“極大” とは，$W \subsetneqq W'$ となるような t. isot. な部分空間 W' が存在しないことをいう．］$\dim W = r$ とし，W の一つの底を $(e_1, \cdots, e_r)$ とすれば，補題 1 の条件 (5a) が成立する．よってその補題により，(5b) をみたすような $e_1', \cdots, e_r' \in V$ をとることができる．

$$W' = \{e_1', \cdots, e_r'\}_{\boldsymbol{R}}$$

とおけば，W' も t. isot. で，補題 1 の後で述べた注意により，

$$\dim W' = \dim W = r, \qquad W \cap W' = \{0\},$$

かつ $W + W'$ は正則である．よって

(6) $$V_0 = (W+W')^{\perp}$$

とおけば，直和分解

(7) $$V = W \oplus W' \oplus V_0$$

が得られる．

上記によりこの分解は次の性質をもっている：

(i) W, W' は t. isot.,

(ii) V_0 は isot. なベクトルを含まない．

(iii) $W+W'$ と V_0 とは直交する．

(i),(iii) はすでに述べた．もし V_0 が isot. なベクトル $v(\neq 0)$ を含めば，$W+\{v\}_R$ は W を真に含む t. isot. な部分空間となり，W の極大性に矛盾する．よって (ii) も成立する．

一般に (i)～(iii) をみたすような直和分解 (7) を (V, S) の**ウィット** (Witt) **分解**という．

ウィット分解があれば必然的に $\dim W = \dim W'$ である．実際，$\dim W = r$, $\dim W' = r'$, $\dim V_0 = n_0$ とすれば (i),(iii) から

(8) $$W^{\perp} \supset W+V_0, \qquad W'^{\perp} \supset W'+V_0.$$

各辺の次元をみて

$$n-r \geqq r+n_0, \qquad n-r' \geqq r'+n_0.$$

$n = r+r'+n_0$ であるから，これらから $r = r'$ を得る．同時に (8) で等号が成立することがわかる．また，(ii) と (8) から容易に，W, W' が共に極大な t. isot. 部分空間であることもいえる．(iii) により $W+W'$ と V_0 は共に正則な部分空間である．

以上により

定理 1. （正則な）一般距離ベクトル空間 (V, S) はウィット分解をもつ．

が得られた．我々は始めから実ベクトル空間で議論してきたけれども，上の証明を読み直してみればわかるように，実数の性質のうち実際に使ったのは四則演算（加減乗除）ができること，抽象代数の言葉でいえば，実数全体の集合 $\boldsymbol{R}$ が一つの（可換）“体”になること，だけである．［精しくいえば，

補題1の証明の最後の所で2による割算を行ったから，$2=1+1\neq 0$，すなわち体の“標数”が2でないこと，も使った.］したがって定理1は一般に(標数2でない)任意の体 F の上の一般距離ベクトル空間 (V, S) に対して成立する[†].

ウィット分解における V_0 のように isot. なベクトルを含まない（正則）部分空間を**非アイソトロピック**(anisotropic)，略して anisot. という．$F=\boldsymbol{R}$ の場合には，正則部分空間 V_1 が anisot. になるのは，S の V_1 への制限 $S|V_1$ が正値または負値の定符号になる場合だけである．よって $\dim W=\dim W'=r$, $\dim V_0=n_0$, S の符号を (p, q) とすれば，$S|V_0$ が正値定符号のときは

$$S\sim\begin{pmatrix}0 & 1_r & 0\\ 1_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1_{n_0}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1_{r+n_0} & 0\\ 0 & -1_r\end{pmatrix},$$

したがって $p=r+n_0$, $q=r$. 同様に $S|V_0$ が負値定符号のときには，$p=r$, $q=r+n_0$ となる．いずれにしても $r=\mathrm{Min}\{p, q\}$ で，これは直交群 $O(V, S)$ の“階数”（第9章）に他ならない．

ついでに，$F=\boldsymbol{C}$（複素数体）の場合についていえば，複素ベクトル空間 V の正則な部分空間 V_1 が anisot. になるのは $\dim V_1\leqq 1$ の場合だけである．(任意の2次方程式は必ず複素数の根をもつから.）よってウィット分解(7)において $n_0=0$ または 1，したがって

$$r=\left[\frac{n}{2}\right]\qquad\text{（ガウス記号）}\tag{9}$$

となる．この場合 r は可能な最大値に達しているわけである．

逆に F を $\boldsymbol{R}$ より小さく，例えば $F=\boldsymbol{Q}$（有理数体）とすれば，r も小さくなり得る．前にあげた例

$$S=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$$

---

†) 二次形式論では標数2の場合は特殊である.「雑談」Ⅳ参照.

の場合，（$\boldsymbol{R}$ 上で考えれば $r=1$ であったが，）$\boldsymbol{Q}$ で考えれば

$$S[x]=x_1{}^2-2x_2{}^2=0$$

となるような有理ベクトル x は（0以外に）存在しない．［図1の二直線上には有理点が（原点以外に）ない．］したがって $r=0$，すなわち $V=\boldsymbol{Q}^2$ 自身 anisot. である．この場合直交群 $O(V,S)$ は $\boldsymbol{Q}$ 上の代数群としてコンパクト群とよく似た性質をもっているのである．

4. ウィットの第二定理：直交群の軌跡は球である

ウィット分解における極大 t. isot. 部分空間 W,W' のとり方は幾通りもあるが，その次元 r は一意的に定まる．（それを**ウィット指数**という．）これは $F=\boldsymbol{R}$ の場合には本質的にシルベスターの定理と同値である．また $F=\boldsymbol{C}$ の場合には (9) から明白である．一般の場合を証明するために，まず次の（やはりウィットによる）定理を証明しよう．

定理 2. (V,S) を正則な一般距離ベクトル空間とする．V の isot. でないベクトル v_1,v_1' に対して，$g\in O(V,S)$ があって $v_1'=gv_1$ となるためには $S[v_1]=S[v_1']$ となることが必要十分である．

［いいかえれば，V における直交群 $O(V,S)$ のオービットは一般の“球”になる．これも $F=\boldsymbol{R}$ のときは周知であるが，我々はより一般に（標数2でない）体 F の上の証明を与える．］

証明． 必要なことは明白．よって $S[v_1]=S[v_1']\neq 0$ と仮定し，$V_1=\{v_1\}_F$，$V_1'=\{v_1'\}_F$ とおく．

$V_1=V_1'$ ならば，$v_1'=\pm v_1$ となるから $g=\pm 1_V$ とおけばよい．

$V_1\neq V_1'$ とし，$U_1=V_1+V_1'$ とおく．

1）U_1 が正則な場合．$V_1{}^\perp\cap U_1$，$V_1'{}^\perp\cap U_1$ は共に（正則な）1次元部分空間である．それぞれの生成元 v_2,v_2' をとれば

$$U_1=\{v_1\}_F\oplus\{v_2\}_F=\{v_1'\}_F\oplus\{v_2'\}_F$$

と直交する部分空間の直和に分解される．よって $S[v_1]=S[v_1']=\alpha$，$S[v_2]=\beta$，$S[v_2']=\beta'$ とおけば

$$S|U_1 \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta' \end{pmatrix}.$$

$\beta/\beta' = \gamma^2\ (\gamma \in F)$ とかけるから，v_2' を $\gamma v_2'$ でおきかえ，$\beta = \beta'$ とすることができる．そのとき $g \in GL(V)$ を

$$g(v_1) = v_1', \qquad g(v_2) = v_2', \qquad g|U_1{}^\perp = \mathrm{id}_{U_1{}^\perp}$$

によって定義すれば，明らかに $g \in O(V, S)$ である．($\mathrm{id}_{U_1{}^\perp}$ は $U_1{}^\perp$ の恒等写像を表わす．)

2) U_1 が正則でない場合．$w \in U_1 \cap U_1{}^\perp$, $w \neq 0$ をとれば

$$U_1 = \{w, v_1\}_F$$

となり，この底に関して

$$S|U_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

である．補題1により $w' \in V$ で $S(w, w') = 1$, $S[w'] = 0$ となるものが存在する．$w' \notin U_1$ だから w, v_1, w' は一次独立で，$U = \{w, v_1, w'\}_F$ とおけば

$$S|U \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha & * \\ 1 & * & * \end{pmatrix},$$

よって U は正則である．

$$U_2 = \{v_1\}_F{}^\perp \cap U, \qquad U_2' = \{v_1'\}_F{}^\perp \cap U$$

とおけば，U_2, U_2' も正則で

$$U = \{v_1\}_F \oplus U_2 = \{v_1'\}_F \oplus U_2'$$

となる．U_2, U_2' は isot. なベクトルを含むから，定理1を U_2, U_2' に適用して

$$S|U_2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S|U_2' \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

よってこの行列表示を与える U_2, U_2' の底を (w_1, w_2), (w_1', w_2') とし，$g \in GL(V)$ を

$$g(v_1) = v_1', \qquad g(w_1) = w_1', \qquad g(w_2) = w_2',$$
$$g|U^{\perp} = \mathrm{id}$$

によって定義すれば $g \in O(V, S)$ である．（証終）

5. ウィット分解の一意性

次の定理は定理２の一般化である．

定理 3. (V, S) を正則な一般距離ベクトル空間，V_1, V_1' をその正則な部分空間とする．もし一般距離ベクトル空間として $(V_1, S|V_1) \cong (V_1', S|V_1')$，すなわち全単射である一次写像

$$\varphi_1 : V_1 \longrightarrow V_1'$$

で

(10a)
$$S[\varphi_1(x)] = S[x] \qquad (x \in V_1)$$

をみたすものが存在すれば，φ_1 を (V, S) の直交変換に拡張することができる．すなわち，ある $g \in O(V, S)$ があって，$g|V_1 = \varphi_1$ となる．

$\dim V_1 = 1$ のとき，この定理は本質的に定理２に帰着される．それゆえ $\dim V_1$ に関する帰納法で証明することにしよう．$V_2 = V_1{}^{\perp}$, $V_2' = V_1'{}^{\perp}$ とおく．$(V_2, S|V_2) \cong (V_2', S|V_2')$，すなわち全単射である一次写像

$$\varphi_2 : V_2 \longrightarrow V_2'$$

で

(10b)
$$S[\varphi_2(y)] = S[y] \qquad (y \in V_2)$$

となるようなものが存在すること，がいえれば $g \in GL(V)$ を

$$g|V_1 = \varphi_1, \qquad g|V_2 = \varphi_2$$

と定義することにより，求める直交変換が得られる．

定理３の証明. $\dim V_1 = 0$ のときは自明である．（$\varphi_2 = \mathrm{id}$ とおけばよい．）$\dim V_1 \geqq 1$ とし，$v_1 \in V_1$, $S[v_1] \neq 0$ をとり，$v_1' = \varphi_1(v_1) (\in V_1')$,

$$U_1 = \{v_1\}_F{}^{\perp} \cap V_1, \qquad U_1' = \{v_1'\}_F{}^{\perp} \cap V_1'$$

とおけば，$U_1' = \varphi_1(U_1)$ である．明らかに

(11)
$$V = \{v_1\}_F \oplus U_1 \oplus V_2$$

$$= \{v_1'\}_F \oplus U_1' \oplus V_2' \qquad \text{(直交直和分解)}.$$

定理2により，ある $g_1 \in O(V, S)$ があって $g_1(v_1) = v_1'$. よって

$$g_1(U_1 \oplus V_2) = U_1' \oplus V_2'$$

である．$V' = U_1' \oplus V_2'$ とおけば，V' は $(n-1)$ 次元の正則部分空間で，その中で

$$\varphi_1' = (\varphi_1 \circ g_1^{-1}) \mid g_1(U_1)$$

は $g_1(U_1)$ から U_1' への（一般距離ベクトル空間の）同型を与えている．$\dim g_1(U_1) = \dim V_1 - 1$ であるから帰納法の仮定により $g' \in O(V', S|V')$ で $g'|g_1(U_1) = \varphi_1$ となるものがある．V' の中での $g_1(U_1), U_1'$ の直交空間はそれぞれ $g_1(V_2), V_2'$ であるから，$g'(g_1(V_2)) = V_2'$. よって $\varphi_2 = g' \circ g_1 | V_2$ とおけばよい．（証終）

定理3からウィット分解における $\dim W = r$ の一意性がでる．実際

$$V = W_1 \oplus W_1' \oplus V_1$$

を V の他のウィット分解とし $\dim W_1 = r_1 > r$ と仮定する．W_1 の任意の底 $(f_1, \cdots, f_{r_1})$ に対し

$$S(f_i, f_j') = \delta_{ij}$$

となるような W_1' の底 $(f_1', \cdots, f_{r_1}')$ をとることができる．（$S|W_1 \times W_1'$ は非退化だから．）W, W' にも (5a, b) をみたす底 $(e_i), (e_i')$ をとっておけば

$$\varphi_1(e_i) = f_i, \qquad \varphi_1(e_i') = f_i' \qquad (1 \leqslant i \leqslant r)$$

によって定義される一次写像により（一般距離ベクトル空間の）同型 $W + W' \cong \{f_1, \cdots, f_r, f_1', \cdots, f_r'\}_F$ が得られる．定理3により この同型は $g \in O(V, S)$ に拡張される．そのとき $g^{-1}(f_{r+1}) \in V_0$ は isot. であるから，V_0 が anisot. であることに矛盾．——よって $r = r_1$ でなければならない．

同時に上記の $g \in O(V, S)$ によって

$$g(W) = W_1, \qquad g(W') = W_1', \qquad g(V_0) = V_1$$

となることもわかる．したがってウィット分解は（S に関する）直交変換を除いて一意的に定まるのである．［また二つの isot. なベクトル $v_1, v_1' \in V$

に対し，必ず $g \in O(V, S)$ があって $v_1' = gv_1$ となることもわかる．］

6．交代双一次形式の場合

A を n 次実交代行列とし $V = \boldsymbol{R}^n$ に

$$A(x, y) = {}^t x A y \qquad (x, y \in V) \tag{12}$$

により（交代）双一次形式を定義する．この場合はすべての $x \in V$ に対し

$$A(x, x) = 0,$$

すなわち，すべての $x\ (\neq 0)$ は isot. である．

A を可逆（非退化）と仮定すれば，3 と同じ論法で (V, A) のウィット分解が得られる．しかし V_0 に相当する所は $\{0\}$ になってしまうから

$$V = W \oplus W' \tag{13}$$

の形になる．したがって $\dim W = r$ とすれば，$n = 2r$ で，V は

$$\begin{aligned} &A(e_i, e_j) = A(e_i', e_j') = 0 \\ &A(e_i, e_j') = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \cdots, n) \end{aligned} \tag{14}$$

となるような底 $(e_1, \cdots, e_r, e_1', \cdots, e_r')$ をもつ．［このような底を (V, A) の“標準底”という．］いいかえれば，任意の可逆交代行列 A に対し，ある $g \in GL(n, \boldsymbol{R})$ があって

$$ {}^t g A g = J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix} \tag{15}$$

と標準形に変換される．一般に，A が非退化でないときにも，同様の論法で，$\operatorname{rank} A = 2p$（偶数）となり，ある $g \in GL(n, \boldsymbol{R})$ があって

$$ {}^t g A g = \begin{pmatrix} 0 & 1_p & 0 \\ -1_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{15'}$$

となることが証明される．（以上のことも，$F = \boldsymbol{R}$ の場合だけでなく，標数 2 でない任意の体 F の上で成立する．）

非退化な交代行列 A に対する“直交群”に当るもの

$$\{\, g \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid {}^t g A g = A \,\} \tag{16}$$

を A の**シンプレクティック群** (symplectic group) といい，$Sp(V, A)$，特に $A=J_n$ のとき，$Sp(2n, \boldsymbol{R})$ とかく．これも（代数的な）リー群の一例である．直交群のときと同じ論法で次のようなことが証明される．

1) $G'=Sp(2n, \boldsymbol{R})$, $K'=O(2n)\frown G'$, $\mathcal{P}'=\mathcal{P}_{2n}(\boldsymbol{R})\frown G'$ とおけば，K' は G' の極大コンパクト部分群で

$$G'=K'\cdot\mathcal{P}'\approx K'\times\mathcal{P}' \qquad \text{（カルタン分解）}. \tag{17}$$

この場合

$$K'=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix} \middle| \, {}^tab={}^tba,\ {}^taa+{}^tbb=1_n\right\}$$

は連結であることが証明される．［それは対応 $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a\end{pmatrix}\longmapsto a+ib$ によりユニタリー群 $U(n)$ と同型になる．］よって G' も連結である．

2) $A'=A^{(2n)}\frown G'$ ($A^{(2n)}$ は $2n$ 次対角行列の群を表わす）とおけば，A' は $\mathcal{P}'$ の中の極大部分群であり，$\mathcal{P}'$ の任意の極大部分群は（K' に関して）A' に共役である．

明らかに $\dim A'=n$ であるから，この場合にも G' の“階数”は交代行列 A のウィット指数 n と一致している．1), 2) の証明は例によって読者の練習問題ということにしておこう．

第11章　不変微分作用素のリー環

前章では話が“抽象幾何”（そういう言葉があるかどうか知らないが）的になってしまったので，この章ではもう少し具体的な微分作用素に話を戻すことにしよう．

1. ベクトル場と微分作用素

ワン・パラメーター群の話（第3章）のとき，$G=GL(n,\boldsymbol{R})$ のワン・パラメーター部分群は，G 上の左（または右）不変な“ベクトル場”の積分曲線として得られることを説明した．ここではもう少し一般に，リー群 G があるユークリッド空間 $\boldsymbol{R}^N$ の開集合 M に解析的に作用している，という設定で話をすることにしよう．

M 上の“ベクトル場”とは，M の各点 x に一つの N 次元ベクトルを対応させる対応のことである．そのベクトルの成分は点 x の関数だから $f_1(x)$, $\cdots,f_N(x)$ とかける．したがって解析的にいえば，ベクトル場とは M 上で定義された N 個の関数の組 $(f_1(x),\cdots,f_N(x))$ に他ならない．以下，関数 $f_1,\cdots,f_N$ は（無限回）微分可能と仮定しておく．

このベクトル場 $(f_i(x))$ に対して次のような“微分作用素”を作る：

$$X=f_1(x)\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots\cdots+f_N(x)\frac{\partial}{\partial x_N}. \tag{1}$$

最初 X は単にこのような和として形式的に定義されたものと思っていただきたい．しかし以下に説明するように，Xには実際の“作用素”としての意味をもたせることができる．便宜上，M の上で定義された無限回（偏）微分可能な（実数値）関数全体の集合を $\mathcal{C}^\infty(M)$ とかく．$f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ に対して

$$(Xf)(x)=f_1(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x)+\cdots\cdots+f_N(x)\left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)(x)$$

とおけば，右辺はすべての $x\in M$ に対して意味をもつ．しかもこの式によって定義される関数（それを Xf とかく）はまた（無限回）微分可能な関数になる．よって X を $f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ に $Xf\in\mathcal{C}^\infty(M)$ を対応させる写像（作用素）と解釈することができる．（一般に関数空間の写像を“作用素”というのである．）

作用素 X は次のような性質をもっている：任意の $f,g\in\mathcal{C}^\infty(M)$, $\lambda,\mu\in\boldsymbol{R}$ に対して

$$(2)\qquad \begin{cases} X(f+g)=Xf+Xg, \\ X(\lambda f)=\lambda\cdot X(f), \end{cases}$$

$$(3)\qquad X(fg)=X(f)\cdot g+f\cdot X(g).$$

(2) は $\mathcal{C}^\infty(M)$ を（無限次元）ベクトル空間とみなしたとき，X が $\mathcal{C}^\infty(M)$ からそれ自身への線形写像であることを示している．これは偏微分作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ が線形であることから明らか．(3) もよく知られた“積の微分”の公式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(fg)=\frac{\partial f}{\partial x_i}\cdot g+f\cdot\frac{\partial g}{\partial x_i}$$

から直ちに得られる．$\mathcal{C}^\infty(M)$ の作用素で (2), (3) をみたすものを一般に一次（一階）の（抽象的）**微分作用素**といい，その全体を $\mathfrak{X}(M)$ とかく．その中で特に (1) の形で与えられるものを仮に具体的**微分作用素**といい，その全体を $\mathfrak{X}_0(M)$ とかくことにする．［実際には $\mathfrak{X}(M)=\mathfrak{X}_0(M)$ となることが証明される[†]のでこの区別はまったく必要がない．］

二つの（同種の）微分作用素 X, Y に対し，その和 $X+Y$，スカラー倍 λX 等が

$$(4)\qquad \begin{cases} (X+Y)(f)=Xf+Yf, \\ (\lambda X)(f)=\lambda\cdot(Xf) \end{cases}$$

†) Chevalley, Theory of distributions (Lect. Notes at Columbia Univ., 1950–51), p. 16.

によって定義される．これらがまた（同種の）微分作用素であることは直ちにわかる．さらに任意の $\varphi\in\mathcal{E}^\infty(M)$ に対して積 φX を

$$(5)\qquad (\varphi X)(f)=\varphi\cdot(Xf)$$

によって定義すればこれも（同種の）微分作用素になる．このように $\mathfrak{X}(M)$, $\mathfrak{X}_0(M)$ 等は単にベクトル空間であるばかりでなく $\mathcal{E}^\infty(M)$ の元による（左）乗法も許す，いわゆる $\mathcal{E}^\infty(M)$-加群になっている．はじめに (1) で定義した微分作用素 X はこの意味でちょうど偏微分作用素 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ の "$f_i(x)$ 倍" の "和" になっているのである．

M 上のベクトル場 $(f_i(x))$ を微分作用素とみなすことの一つのメリットは，後者は座標系に関係なく（intrinsic に）定義されていることである．今 $\boldsymbol{R}^N$ に新しい座標 $(x_1',\cdots,x_N')$ をとり，その座標変換が

$$(6)\qquad x_i'=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j$$

によって与えられているとする．偏微分の連鎖律により

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i'}\alpha_{ij}$$

であるから，(1) で与えられる X に対し

$$\begin{aligned}Xf&=\sum_{j=1}^{N}f_j(x)\frac{\partial f}{\partial x_j}=\sum_j f_j(x)\left(\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i'}\alpha_{ij}\right)\\&=\sum_{i=1}^{N}\left(\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}f_j(x)\right)\frac{\partial f}{\partial x_i'}.\end{aligned}$$

よって X を新しい座標を使ってかけば

$$(7)\qquad X=\sum_{i=1}^{N}g_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i'},\qquad g_i(x)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}f_j(x)$$

となる．このように X の係数として生じるベクトル場の成分 $(f_i(x))$ は $\boldsymbol{R}^N$ のベクトルの成分とまったく同じ変換法則をみたす．このようなベクトル場は（習慣的に）**反変ベクトル場**と呼ばれている．（我々の見方からすればこれを "共変ベクトル場" と呼びたいところだが，習慣として決まってしまっているので致し方ない．）

以上で M の上の "反変ベクトル場" と（一次の）"微分作用素" とは実

質的にはまったく同じものであることが理解されたと思う.

2. ポアソンの括弧

ベクトル場を微分作用素とみることのもう一つの利点はそれによって積が自然に定義されることである.

今, $X, Y \in \mathfrak{X}_0(M)$,

$$X=\sum_i f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y=\sum_i g_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

とする. $\mathcal{C}^\infty(M)$ の作用素としてその合成 $XY\,(=X\circ Y)$ を作れば

$$\begin{aligned}(XY)f=X(Yf)&=X\Big(\sum_i g_i\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\\ &=\sum_i (Xg_i)\cdot\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_i g_i\cdot X\Big(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big)\\ &=\sum_{i,j} f_j\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{i,j} g_i f_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}.\end{aligned}$$

これも一つの微分作用素ではあるが（2次微分 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ を含むから）一次ではない. ここで積の順序をかえて YX を作ってみれば

$$\begin{aligned}(YX)f&=Y(Xf)\\ &=\sum_{i,j} g_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{i,j} f_i g_j\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}.\end{aligned}$$

よく知られた公式 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ によりこれらの式の第二項は一致する. よって“交代積” $[X, Y]=XY-YX$ を作れば, 2次微分の項が消えて

$$\begin{aligned}[X,Y]f&=X(Yf)-Y(Xf)\\ &=\sum_{i,j=1}^N\Big(f_j\frac{\partial g_i}{\partial x_j}-g_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)\frac{\partial f}{\partial x_i}\end{aligned}$$

となり, 一次の (具体的) 微分作用素が得られる. これを**ポアソン** (Poisson) **の括弧**という. 上式を再記すれば

$$[X,Y]=\sum_{i=1}^N\Big(\sum_{j=1}^N\Big(f_j\frac{\partial g_i}{\partial x_j}-g_j\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big)\Big)\frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{8}$$

(抽象的な)微分作用素 X, Y に対しても, その交代積 $[X, Y]=XY-YX$

が定義され，それがまた条件 (2), (3) をみたすことは直ちに確かめられる．またこの交代積が，第3章にあげた条件

$$[X,X]=0,\qquad [X,Y]=-[Y,X],$$
$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

（ヤコービの恒等式）

をみたすことも容易にわかる．（簡単だからこれらのことのチェックは読者にお任せする．）

以上により $\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}_0(M)$ が交代積（ポアソン積）に関してリー環になっていることがわかった．しかしこのリー環は非常に大きく，一般には無限次元であるから，代数的に取扱いにくい．そこでリー群 G が M に作用していることを利用して G-不変な微分作用素だけに着目してみることにしよう．

3. 不変微分作用素

記号を明確にするために，G の M への作用を ρ_a で表わす：

$$\rho_a:\ x\longmapsto ax\qquad (a\in G, x\in M).$$

$f\in \mathcal{C}^\infty(M)$ に対し

$$(\rho_a{}^*f)(x)=f(ax),$$

すなわち

$$\rho_a{}^*f=f\circ\rho_a\qquad (a\in G)\tag{9}$$

とおけば $\rho_a{}^*$ は関数空間 $\mathcal{C}^\infty(M)$（から自分自身へ）の一つの（線形）作用素になる．これを ρ_a の**共役**（adjoint, dual）という．

（$\rho_{ab}=\rho_a\circ\rho_b$ であるが，共役の方では $\rho_{ab}{}^*=\rho_b{}^*\circ\rho_a{}^*$ となることに注意．）

微分作用素 X が群 G の作用（の共役）と可換であるとき，すなわち

$$X\circ\rho_a{}^*=\rho_a{}^*\circ X\qquad (a\in G)\tag{10}$$

が成立するとき，G-**不変**（または単に**不変**）という．$\rho_a{}^*$ の定義に戻って (10) をかきかえれば

$$X(f(ax))=(Xf)(ax)\tag{10'}$$

となるが，このような表現には細心の注意を要する．左辺は $f(ax)$ を x の

関数とみて微分作用素 X をほどこしたものであるが，右辺は $f(x)$ に X をほどこした後で x に ax を代入したものである．これらは一般には相異なる！　したがって散漫に $Xf(ax)$ などとかいてしまっては何のことだか判らない！　作用素の等式として (10) のようにかけば，簡単でしかもまぎれようがない！

G–不変な $X\in\mathfrak{X}_0(M)$ 全体を $\mathfrak{X}_0(M)^G$ または $\mathfrak{X}_0(M,\rho_a)$ とかく．それが $\mathfrak{X}_0(M)$ の部分リー環になることは直ちにわかる．実際 $X, Y\in\mathfrak{X}_0(M)^G$ とすれば，すべての $a\in G$ に対し

$$\begin{aligned}[X, Y]\circ\rho_a{}^* &= (X\circ Y-Y\circ X)\circ\rho_a{}^*\\ &= \rho_a{}^*\circ(X\circ Y-Y\circ X)\\ &= \rho_a{}^*\circ[X, Y],\end{aligned}$$

よって $[X, Y]\in\mathfrak{X}_0(M)^G$ である．

$\mathfrak{X}_0(M)^G$ を実際に求めるために条件 (10′) の意味をしらべてみよう．X が (1) の形であるとすれば，(10′) の左辺は

$$X(f(ax)) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(f(ax))$$

となる．今 $x' = \rho_a(x) = (x_1', \cdots, x_N')$ とおき，写像 ρ_a のヤコビアン（行列）を

$$\mathrm{Jac}(\rho_a) = \left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right)$$

「(i,j) 成分が $\dfrac{\partial x_i'}{\partial x_j}$ であるような N 次正方行列」とすれば，偏微分の連鎖律により

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(f(ax)) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i'}\right)_{x'=ax}\cdot\left(\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right)_x.$$

よって

$$X(f(ax)) = \sum_{i,j=1}^{N}\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}f_j(x)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(ax).$$

一方，(10′) の右辺は

$$(Xf)(ax) = \sum f_i(ax)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(ax).$$

よって (10′) が成立するためにはベクトル成分 $(f_i(x))$ に対して

$$f_i(ax)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}f_j(x)\qquad (x'=ax) \tag{11}$$

が成立することが必要十分である．G が M に推移的に作用しているような場合には，この式から $f_i(x)$ の形を決めることができ，$\mathfrak{X}_0(M)^G$ が有限次元になることがいえる．いくつかの例についてしらべてみることにしよう．

4. いくつかの例

例 1. $G=GL(n,\boldsymbol{R})$, $M=\boldsymbol{R}^n$ の場合，G は M に一次変換として作用している．$a=(a_{ij})\in GL(n,\boldsymbol{R})$ に対し写像 $x\longmapsto x'=ax$ のヤコビアンは行列 $a=(a_{ij})$ 自身である．よって (11) は

$$f_i(ax)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(x) \tag{12}$$

となる．ここで特に $a=\lambda 1_n$，すなわち $a_{ij}=\lambda\delta_{ij}$ とおけば

$$f_i(\lambda x)=\lambda f_i(x).$$

よって $f_i(x)$ は斉一次になる．したがって

$$f_i(x)=\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_j \tag{$*$}$$

とかき表わされる．これを (12) に代入すれば

$$\sum_{j,k}c_{ij}a_{jk}x_k=\sum_{j,k}a_{ij}c_{jk}x_k.$$

したがって行列 (c_{ij}) はすべての $(a_{ij})\in GL(n,\boldsymbol{R})$ と可換でなければならない．

補題 1. n 次行列 (c_{ij}) がすべての $(a_{ij})\in GL(n,\boldsymbol{R})$ と可換ならば，(c_{ij}) はスカラー行列である．すなわち，ある $c\in\boldsymbol{R}$ があって $(c_{ij})=c1_n$.

[これはよく知られた事実であるが，後により強い結果（補題2）の略証を与えることにする.]

補題の結果を (＊) に代入して $f_i(x)=cx_i$ を得る．逆にこれが (12) をみたすことは明らか．したがってこの場合 $\mathfrak{X}_0(\boldsymbol{R}^n)^G$ は“オイラー (Euler) の微分作用素”

$$E = x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots\cdots+x_N\frac{\partial}{\partial x_N}$$

によって生成される1次元ベクトル空間になる．

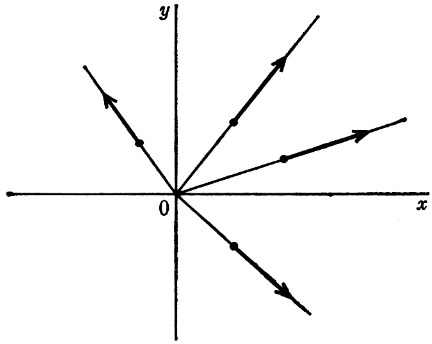


図 1　$\boldsymbol{R}^2$ において E に対応するベクトル場．
点 (x, y) にベクトル (x, y) を対応させる．

例 2.　$G = M = GL(n, \boldsymbol{R})$, $\rho_a = \lambda_a$ の場合．この場合，$N = n^2$ 個の座標関数は $x_{ij}\,(i, j = 1, \cdots, n)$ で与えられるから，$X \in \mathfrak{X}_0(G)$ を

$$X = \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

とかくことにする．$a = (a_{ij}) \in G$ に対し

$$\lambda_a:\ x = (x_{ij}) \longmapsto x' = (x_{ij}') = (a_{ij})(x_{ij})$$

のヤコビアンは (n^2, n^2) 型の大きな行列で，その $((i,j), (k,l))$ 成分は $a_{ik}\delta_{jl}$ で与えられる．よって (11) は

$$(13)\qquad f_{ij}(ax) = \sum_{k,l=1}^{n} a_{ik}\delta_{jl}f_{kl}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}f_{kj}(x)$$

となる．この式で $x = 1_n$ とおき，$f_{ij}(1_n) = c_{ij}$ とすれば $f_{ij}(a) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}c_{kj}$，したがって

$$(14)\qquad f_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}c_{kj}$$

を得る．逆に任意の n 次行列 (c_{ij}) に対し (14) で定義される $(f_{ij}(x))$ が

条件 (13) をみたすことは見易い．記号を改めて，任意の n 次行列 $A=(a_{ij})$ に対して

(15) $$X_A=\sum_{i,j,k=1}^{n} x_{ik}a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

とおけば

$$\mathfrak{X}_0(G,\lambda_a)=\{\, X_A \mid A\in \mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})\,\}$$

であることがわかった．$\mathfrak{X}_0(G,\lambda_a)$ の元を G の**左不変な**微分作用素という．X_A に対応するベクトル場は $x\in GL(n,\boldsymbol{R})$ にベクトル xA を対応させるベクトル場である．(xA は n 次行列だが，それを n^2 次元ベクトルとみるのである．)

$A=(a_{ij})$, $B=(b_{ij})\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$, $X=X_A$, $Y=X_B$ とすれば，ポアソン積 $[X,Y]$ における $\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}$ の係数は

$$\begin{aligned}\sum_{k,l=1}^{n}\left(f_{kl}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_{kl}}-g_{kl}\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_{kl}}\right)&=\sum_{k,l,p}(x_{kp}a_{pl}\delta_{ik}b_{lj}-x_{kp}b_{pl}\delta_{ik}a_{lj})\\&=\sum_{p,l}x_{ip}(a_{pl}b_{lj}-b_{pl}a_{lj}).\end{aligned}$$

よってちょうど $[X,Y]=X_{[A,B]}$ となっている．すなわち対応 $A\longmapsto X_A$ により，リー環としての同型

(16) $$\mathfrak{g}(n,\boldsymbol{R})\cong\mathfrak{X}_0(G,\lambda_a)$$

が得られる．いいかえれば，行列の交代積をポアソン積の特別な場合とみなすことができるのである．

同様にして G の右からの作用 μ_a: $x\longmapsto xa$ に対して不変な微分作用素は

(17) $$\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\qquad (A=(a_{ij})\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R}))$$

の形になることが証明される．この微分作用素を X'_A とかくことにしよう．そうすれば

$$\mathfrak{X}_0(G,\mu_a)=\{\, X'_A \mid A\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})\,\}$$

である．(ただしこの場合には $[X'_A,X'_B]=-X'_{[A,B]}$ となる．すなわち対応 $A\longmapsto X'_A$ は $\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ から $\mathfrak{X}_0(G,\mu_a)$ へのリー環の“逆同型”を与え

ている.)

練習問題. G の上の (一次) 微分作用素で λ_a, μ_a $(a\in G)$ の両方に対して不変なものはどんなものか? (答は $\boldsymbol{R}^{n^2}$ におけるオイラーの微分作用素である.)

例 3. $G=GL(n,\boldsymbol{R})$, $M=\mathcal{P}_n(\boldsymbol{R})$, G の M への作用は $\rho_a' : x\longmapsto ax^ta$ で与えられているとする. この場合, $N=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ 個の座標関数は $x_{ij}\ (i\leqslant j)$ で与えられるから, $X\in\mathfrak{X}_0(\mathcal{P}_n(\boldsymbol{R}),\rho_a')$ を

$$X=\sum_{i\leqslant j}f_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

とかく. $x'=(x_{ij}')=ax^ta$ とすれば,

$$x_{ij}'=\sum_{k,l=1}^{n}a_{ik}a_{jl}x_{kl},$$

したがって

$$\frac{\partial x_{ij}'}{\partial x_{kl}}=\begin{cases}a_{ik}a_{jl}+a_{il}a_{jk} & (k<l)\\ a_{ik}a_{jk} & (k=l).\end{cases}$$

よって条件 (11) は

$$(18)\qquad f_{ij}(ax^ta)=\sum_{k<l}(a_{ik}a_{jl}+a_{il}a_{jk})f_{kl}(x)+\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}f_{kk}(x)$$

となる. ここで $f_{ij}(1_n)=c_{ij}=c_{ji}$ とおけば, (18) から行列の等式

$$(**)\qquad (f_{ij}(a^ta))=a\cdot(c_{ij})\cdot{}^ta$$

が得られる. 特に $a\in O(n)$ に対しては

$$(c_{ij})=a\cdot(c_{ij})\cdot{}^ta=a\cdot(c_{ij})\cdot a^{-1}.$$

よって行列 (c_{ij}) はすべての直交行列と可換である.

補題 2. n 次行列 (c_{ij}) がすべての $a\in O(n)$ と可換ならば, (c_{ij}) はスカラー行列である.

略証. まず (c_{ij}) がすべての "置換" の行列 T_σ (第9章) と可換なことから $c_{ij}=\alpha\delta_{ij}+\beta$ であることがいえる. 次に (c_{ij}) が

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & \\ 0 & & 1_{n-2}\end{pmatrix}$$

の形の“回転”と可換であることから $\beta=0$ が導かれる．［この補題から“シュア（Schur）の補題の逆”により $O(n)$ が絶対既約であることがいえる．[†)]］

この補題によって $(c_{ij})=\alpha 1_n$ となるから（**）により

$$(f_{ij}(a^ta))=\alpha a^ta.$$

$\mathcal{P}_n(\boldsymbol{R})$ の任意の元 x は a^ta とかけるから，一般に

$$(f_{ij}(x))=\alpha x,$$

すなわち $f_{ij}(x)=\alpha x_{ij}$ となる．逆にこれが（18）をみたすことは明らか．よってこの場合にも不変微分作用素の空間は1次元で，その生成元は $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ におけるオイラーの微分作用素

$$E=\sum_{i\leqq j} x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

で与えられる．

5. 一般の場合

以上，簡単のために，M が $\boldsymbol{R}^N$ の開集合である場合に限って説明したが，もっと一般に M が $\boldsymbol{R}^N$ の中の“曲面”（多様体）になっているときにも，局所座標を使って“微分作用素”や（反変）“ベクトル場”，したがって“不変微分作用素”の概念を定義することができる．特に行列のリー群 $G\subset GL(n,\boldsymbol{R})$ の場合，次のようなことがいえる（証明はやさしい）．$GL(n,\boldsymbol{R})$ 上の左不変な微分作用素 $X_A\,(A\in\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R}))$ が与えられたとする．G のリー環を $\mathrm{Lie}\,G$ で表わすとき，$A\in\mathrm{Lie}\,G$ ならば，X_A に対応するベクトル場 $x\longmapsto xA$ は“G に接している”，すなわち G の各点 x で xA はその点における G の接ベクトル空間に属している（図2）．したがってこれによって“G 上のベクトル場”が定義される．それに対応する $\mathcal{C}^\infty(G)$ の（一次）微分作用素を X_A の“G への制限”といい，$X_A|G$ とかく．そうすればちょうど

†）「線型代数学」p. 238，p. 243.

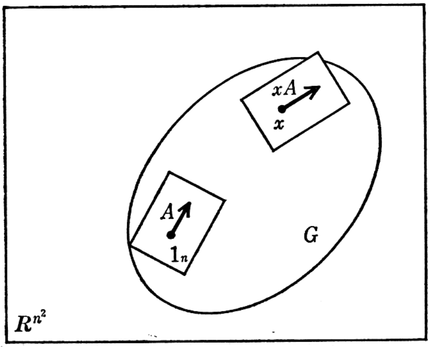


図 2

$$\mathfrak{X}_0(G, \lambda_a) = \{ X_A|G \mid A \in \mathrm{Lie}\, G \}$$

となり，この対応により

$$\mathrm{Lie}\, G \cong \mathfrak{X}_0(G, \lambda_a)$$

である．このことから一般に，行列という枠をはなれて，リー群 G のリー環を G 上の左不変微分作用素のリー環 $\mathfrak{X}_0(G, \lambda_a)$ として定義することができるのである．

第12章　高次の不変微分作用素（リー環の展開環）

1. 左不変微分作用素と右不変微分作用素

前章で述べた(一次の)不変微分作用素についてその要点をまとめておこう．

$G=GL(n,\boldsymbol{R})$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ とする．($\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ は n 次実行列全体の集合であるが，それを交代積 $[A,B]=AB-BA$ によってリー環とみるのである．) $A=(a_{ij})\in\mathfrak{g}$ に対し

$$(1)\qquad \begin{cases} X_A=\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} x_{ik}a_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}, \\ X'_A=\displaystyle\sum_{i,j,k=1}^{n} a_{ik}x_{kj}\frac{\partial}{\partial x_{ij}} \end{cases}$$

とおけば，X_A（または X'_A）は G 上の左（または右）不変微分作用素であり，逆に G 上の一次の左（または右）不変微分作用素はすべてこのようにして得られる．今 G 上の左（または右）不変一次微分作用素全体の作るリー環を $\mathfrak{g}_l$（または $\mathfrak{g}_r$）とかくことにする．[前章の記号では $\mathfrak{g}_l=\mathfrak{X}_0(G,\lambda_a)$, $\mathfrak{g}_r=\mathfrak{X}_0(G,\mu_a)$.] そうすれば上の結果は

$$(2)\qquad \mathfrak{g}_l=\{X_A\mid A\in\mathfrak{g}\},\qquad \mathfrak{g}_r=\{X'_A\mid A\in\mathfrak{g}\}$$

と表わされる．

一般にリー群 $G\subset GL(n,\boldsymbol{R})$ とそのリー環 $\mathfrak{g}=\mathrm{Lie}\,G\subset\mathfrak{gl}(n,\boldsymbol{R})$ に対しても，上記 X_A, X'_A をそれぞれその“G への制限”でおきかえれば，まったく同じ関係が成立する．

数学ではこの $\mathfrak{g}_l$ と $\mathfrak{g}_r$，また（前章の）反変ベクトルと共変ベクトルのように，二つの概念が（双生児のように）一対になってでてくることがしばしばある．そういう場合には，一方だけに偏らず，両者を対等にみてその相互

関係をよくしらべておくことが大切だと思う．

今の場合についていえば，$\mathfrak{g}_l$ と $\mathfrak{g}_r$ との関係は二通りに考えられる．第一に，G において逆元をとる操作を ι とかくことにする：

$$\iota:\ x \longmapsto x^{-1}.$$

これと G における乗法 $\lambda_a : x \longmapsto ax$, $\mu_a : x \longmapsto xa$ との関係をみれば

$$\begin{aligned}\iota(\mu_a(x)) &= (xa)^{-1} = a^{-1}x^{-1} \\ &= \lambda_{a^{-1}}(\iota(x)),\end{aligned}$$

よって

$$(3) \qquad \iota\circ\mu_a = \lambda_{a^{-1}}\circ\iota \qquad (a \in G).$$

前章で説明したように，G 上の無限回微分可能な関数の全体を $\mathcal{C}^\infty(G)$ とかき，$\mathcal{C}^\infty(G)$ における λ_a, μ_a, ι 等の“共役”を $*$ をつけて表わすことにする．例えば $f \in \mathcal{C}^\infty(G)$ に対し

$$(\iota^* f)(x) = (f\circ\iota)(x) = f(x^{-1}).$$

そのとき，G 上の一次微分作用素 X に対し

$$(4) \qquad X \in \mathfrak{g}_l \Longleftrightarrow \iota^* X \iota^* \in \mathfrak{g}_r$$

がいえる．実際，$X \in \mathfrak{g}_l$ とすれば (3) により

$$\begin{aligned}\mu_a{}^*\iota^* X \iota^* &= \iota^* \lambda_{a^{-1}}{}^* X \iota^* \\ &= \iota^* X \lambda_{a^{-1}}{}^* \iota^* = \iota^* X \iota^* \mu_a{}^*,\end{aligned}$$

よって $\iota^* X \iota^* \in \mathfrak{g}_r$．$\iota^{*2} = \mathrm{id}$ であるから明らかにこの逆（$\Longleftarrow$）もいえる．

また $X, Y \in \mathfrak{g}_l$ に対し

$$\begin{aligned}(4\mathrm{a}) \qquad [\iota^* X \iota^*, \iota^* Y \iota^*] &= (\iota^* X \iota^*)(\iota^* Y \iota^*) - (\iota^* Y \iota^*)(\iota^* X \iota^*) \\ &= \iota^* XY \iota^* - \iota^* YX \iota^* \\ &= \iota^* [X, Y] \iota^*\end{aligned}$$

であるから，対応 $\tau : X \longmapsto \iota^* X \iota^*$ は $\mathfrak{g}_l$ から $\mathfrak{g}_r$ へのリー環の同型を与える．

もう一つの自然な対応として $X_A \in \mathfrak{g}_l$ に $X'_A \in \mathfrak{g}_r$ を対応させる対応が考えられる．すなわち単位元 1_n において同じ接ベクトル A をもつ $X \in \mathfrak{g}_l$ と $X' \in \mathfrak{g}_r$ とを対応させるのである．この対応は実は上記の記号で $-\tau$ になっている．（したがってリー環の逆同型になる．）すなわち

(5)
$$\iota^* X_A \iota^* = -X'_A$$
が成立する．これはもちろん左辺の作用素を直接計算しても確かめられるが，次のようにワン・パラメーター群との関係をみた方がより明白であろう．

ワン・パラメーター群 $\{\exp tA\,(t \in \boldsymbol{R})\}$ の $t=0$ における接ベクトルが $A=(a_{ij})$ であるから，$f \in \mathscr{C}^\infty(G)$ に対し

$$\begin{aligned}(X_A f)(1_n) &= \sum_{i,j,k}\left(x_{ik}a_{kj}\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)(1_n)\\ &= \sum_{i,j} a_{ij}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{ij}}\right)(1_n)\\ &= \frac{d}{dt}f(\exp tA)\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

よって X_A の左不変性から，任意の $x \in G$ に対し

(6)
$$\begin{aligned}(X_A f)(x) &= (\lambda_x{}^* X_A f)(1_n)\\ &= (X_A \lambda_x{}^* f)(1_n)\\ &= \frac{d}{dt}(\lambda_x{}^* f)(\exp tA)\Big|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}f(x(\exp tA))\Big|_{t=0}.\end{aligned}$$

同様にして

(6′)
$$(X'_A f)(x) = \frac{d}{dt}f((\exp tA)x)\Big|_{t=0}$$

を得る．これらの式から

$$\begin{aligned}(\iota^* X_A \iota^* f)(x) &= (X_A \iota^* f)(x^{-1})\\ &= \frac{d}{dt}(\iota^* f)(x^{-1}(\exp tA))\Big|_{t=0}\\ &= \frac{d}{dt}f((\exp tA)^{-1}x)\Big|_{t=0}\\ &= (X'_{-A} f)(x)\end{aligned}$$

[$\exp(-tA) = (\exp tA)^{-1}$ だから]．よって (5) が証明された．(4), (5), (6), (6′) 等の関係式は一般の（抽象的）リー群においてもまったく同じ論法で証明される．

2. リー群の共役表現

ここでちょうどよい機会なので，リー環論で非常によく使われる共役表現 (adjoint representation) について触れておこう．[これは “双対表現” (dual representation) と呼ばれるものとは まったく別のものである．混同されないように.]

リー群 G ($GL(n, \boldsymbol{R})$ でなくてもよい) の内部自己同型 $\nu_a: x \longmapsto axa^{-1}$ によって $\mathfrak{g}_l$ または $\mathfrak{g}_r$ の元がどのように変換されるかをみよう，$a \in G$, $X \in \mathfrak{g}_l$ とすれば，$\nu_a = \lambda_a \mu_a^{-1} = \mu_a^{-1} \lambda_a$ であるから

$$\nu_a{}^{*-1} X \nu_a{}^* = \mu_a{}^* X \mu_a{}^{*-1}.$$

これを Y とおけば，Y も一次の微分作用素ですべての $\lambda_b{}^*$ ($b \in G$) と可換である．よって $Y \in \mathfrak{g}_l$，この Y を $(\mathrm{ad}\, a)X$ とかく．写像

$$\text{(7)} \qquad \mathrm{ad}\, a: X \longmapsto Y = \nu_a{}^{*-1} X \nu_a{}^*$$

は明らかに $\mathfrak{g}_l$ の一次変換で，容易にわかるように，$\mathrm{ad}\,(ab) = (\mathrm{ad}\, a) \circ (\mathrm{ad}\, b)$ であるから，(7) により G は $\mathfrak{g}_l$ に線形に作用している．(別の言葉でいえば $a \longmapsto \mathrm{ad}\, a$ は G の $\mathfrak{g}_l$ における “線形表現” である.) これを G の ($\mathfrak{g}_l$ における) **共役表現** (adjoint representation) という．

上の定義 (7) からすぐわかるように，$\mathrm{ad}\, a$ ($a \in G$) は単に $\mathfrak{g}_l$ の一次変換であるばかりでなく そのポアソン積をも保つ．[上記 (4a) と同じ計算で確かめられる.] よってそれは $\mathfrak{g}_l$ のリー環としての “自己同型” である．したがって $a \longmapsto \mathrm{ad}\, a$ は G から $\mathfrak{g}_l$ の “自己同型群” (automorphism group) の中への準同型ということもできる．

まったく同様にして G の $\mathfrak{g}_r$ における共役表現

$$\text{(7')} \qquad \mathrm{ad}'\, a: X' \longmapsto \nu_a{}^{*-1} X' \nu_a{}^*$$

が定義される．これらの表現と $\tau: X \longmapsto X' = \iota^* X \iota^*$ に関して

$$\text{(8)} \qquad \mathrm{ad}'\, a = \tau \circ (\mathrm{ad}\, a) \circ \tau^{-1}$$

が成立する．これは読者の練習問題としておこう．

$G = GL(n, \boldsymbol{R})$ の場合，$b \in G$, $A \in \mathfrak{g}$ とすれば，$f \in \mathscr{C}^\infty(G)$ に対して

$$
\begin{aligned}
(((\mathrm{ad}\, b)X_A)f)(x) &= (\nu_{b^{-1}}{}^* X_A \nu_b{}^* f)(x) \\
&= (X_A \nu_b{}^* f)(b^{-1}xb) \\
&= \frac{d}{dt}(\nu_b{}^* f)(b^{-1}xb(\exp tA))\bigg|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} f(xb(\exp tA)b^{-1})\bigg|_{t=0}.
\end{aligned}
$$

$b(\exp tA)b^{-1} = \exp t(bAb^{-1})$ であるから，上式はちょうど $(X_{bAb^{-1}}f)(x)$ に等しい．よって

(9)
$$(\mathrm{ad}\, b)X_A = X_{bAb^{-1}}.$$

したがって一般に行列のリー環のときには

$$(\mathrm{ad}\, b)A = bAb^{-1}$$

と定義しても同じことなのだが，上に説明したような手続きで $\mathfrak{g}_l$ または $\mathfrak{g}_r$ を使って定義する方が抽象的なリー群の場合にも適用でき，理論上便利なのである．

$G = GL(n, \boldsymbol{R})$ の場合，共役表現に対して不変な $X \in \mathfrak{g}_l$ はどんなものか？（前章の練習問題）(9) により，$X = X_A$ がすべての $\mathrm{ad}\, b$ $(b \in G)$ に対して不変なためには，$bAb^{-1} = A$，すなわち A がスカラー行列 $\lambda 1_n$ $(\lambda \in \boldsymbol{R})$ であることが必要十分（前章の補題1）．したがって

$$X = X_A = \lambda X_{1_n} = \lambda E$$

となる．ここに

$$E = \sum_{i,j=1}^{n} x_{ij} \frac{\partial}{\partial x_{ij}}$$

は“オイラーの微分作用素”である．

一般に $G \subset GL(n, \boldsymbol{R})$ のとき，$B \in \mathfrak{g}$ に対しワン・パラメーター群 $\exp tB$ の共役表現 $\mathrm{ad}(\exp tB)$ は $\mathfrak{g}_l$ の全一次変換群 $GL(\mathfrak{g}_l)$ の中のワン・パラメーター群になる．その $1_{\mathfrak{g}_l}$（$\mathfrak{g}_l$ の恒等変換）における接ベクトルを $\mathrm{ad}\, B$ で表わす．すなわち $X \in \mathfrak{g}_l$ に対し

$$(\mathrm{ad}\, B)(X) = \frac{d}{dt}(\mathrm{ad}(\exp tB))(X)\bigg|_{t=0}.$$

$X=X_A|G$ のとき $X\in\mathfrak{g}_l$ と $A\in\mathfrak{g}$ とを一致させて考えれば

$$\begin{aligned}(\mathrm{ad}(\exp tB))(A) &= (\exp tB)A(\exp tB)^{-1}\\ &= \left(1_n+tB+\frac{t^2}{2}B^2+\cdots\cdots\right)A\left(1_n-tB+\frac{t^2}{2}B^2-\cdots\cdots\right)\\ &= A+t(BA-AB)+\frac{t^2}{2}(B^2A-2BAB+AB^2)+\cdots\cdots\end{aligned}$$

であるから

$$(\mathrm{ad}\,B)(A)=[B,A] \tag{10}$$

となる．したがって $X=X_A|G$ がすべての $\mathrm{ad}\,b\ (b\in G)$ に対して不変ならば，すべての $B\in\mathfrak{g}$ に対し $[B,A]=0$，すなわち A は $\mathfrak{g}$ の "中心" に属する．(したがって X は $\mathfrak{g}_l$ の中心に属する．)

練習問題． 一般に $B\in\mathfrak{g}$ に対し，$\mathfrak{g}$ の一次変換として

$$\mathrm{ad}(\exp tB)=\exp(t\,\mathrm{ad}\,B)$$

が成立することを証明せよ．[G が連結のときには，これから上記の逆，すなわち X が $\mathfrak{g}_l$ の中心に属すならばすべての $\mathrm{ad}\,b\ (b\in G)$ に対して不変であることがいえる．]

3. 高次の不変微分作用素

今まで微分作用素としては一次（一階）のものだけを考えてきたが当然高次のものも考える必要が起ってくる．前章でと同様，さし当り M を $\boldsymbol{R}^N$ の中の開集合，G を M に解析的に作用するリー群と仮定し，その作用を ρ_a とかく．$\boldsymbol{R}^N$ の座標関数 $x_1,\cdots,x_N$ に関して

$$D=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\sum\nu_i=\nu}\varphi_{(\nu_i)}(x)\frac{\partial^\nu}{\partial x_1{}^{\nu_1}\cdots\partial x_N{}^{\nu_N}}\qquad(\varphi_{(\nu_i)}(x)\in\mathcal{C}^\infty(M)) \tag{11}$$

のような形に表わされる $\mathcal{C}^\infty(M)$ の作用素を一般に**高々 m 次の微分作用素**といい，その全体を $\mathcal{L}^{(m)}(M)$ とかく．$D\in\mathcal{L}^{(m)}(M)$, $D\notin\mathcal{L}^{(m-1)}(M)$ のとき，D を（真に）m **次**であるという．$\mathcal{L}(M)=\bigcup_{m=0}^{\infty}\mathcal{L}^{(m)}(M)$ は（作用素の）和と積（"合成"）に関して非可換な環になる．$\mathcal{L}(M)$ は二種類の作用素

$$\varphi\ 倍\quad:f\longmapsto\varphi f\qquad(\varphi\in\mathcal{C}^\infty(M)),$$

$$\text{偏微分}: f \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (i=1,\cdots,N)$$

によって生成される環である.

$D\in\mathcal{L}(M)$ がすべての $\rho_a{}^*$ $(a\in G)$ と可換であるとき，D を G-**不変**（または単に**不変**）**微分作用素**といいその全体を $\mathcal{L}(M)^G$ または $\mathcal{L}(M,\rho_a)$ とかく. これは $\mathcal{L}(M)$ の部分環である.

4. 微分作用素の頭部

高次の微分作用素を考える際，次のような考察が有効である. まず $x_0\in M$ を固定し，$f\in\mathcal{C}^\infty(M)$ に対し

(12)
$$\begin{aligned} D_{x_0}f &= (Df)(x_0) \\ &= \sum_{\nu}\sum_{(\nu_i)}\varphi_{(\nu_i)}(x_0)\left(\frac{\partial^\nu f}{\partial x_1{}^{\nu_1}\cdots\partial x_N{}^{\nu_N}}\right)(x_0) \end{aligned}$$

とおく. $D_{x_0}: \mathcal{C}^\infty(M)\longrightarrow \boldsymbol{R}$ は点 x_0 における“局所的”微分作用素である. D_{x_0} に対しさらに N 変数 $u_1,\cdots,u_N$ の多項式

(13)
$$p_D(u)=\sum_{\nu=0}^{m}\sum_{\sum\nu_i=\nu}\varphi_{(\nu_i)}(x_0)u_1{}^{\nu_1}\cdots u_N{}^{\nu_N}$$

を対応させる. ［$D\in\mathcal{L}^{(m)}(M)$ とする.］ D が真に m 次のとき，p_D の m 次の部分を

(14)
$$\bar{p}_D(u)=\sum_{\sum\nu_i=m}\varphi_{(\nu_i)}(x_0)\,u_1{}^{\nu_1}\cdots u_N{}^{\nu_N}$$

とおく. $\bar{p}_D$ は斉 m 次の多項式である.（それは $\equiv 0$ になるかもしれない.）$\bar{p}_D$ を仮に微分作用素 D の（x_0 における）**頭部**ということにする.

D_1, D_2 がそれぞれ m_1, m_2 次の微分作用素ならば，D_1D_2 $(=D_1\circ D_2)$ は (m_1+m_2) 次の微分作用素で，定義から容易にわかるように

(15)
$$\bar{p}_{D_1D_2}=\bar{p}_{D_1}\cdot\bar{p}_{D_2}$$

が成立する.（しかし $p_{D_1D_2}=p_{D_1}p_{D_2}$ は一般には成立しない！）

特に G が M に推移的に作用しているときには，任意の $x\in M$ に対しある $a=a_x\in G$ があって，$x=a_xx_0$ とかける. よって $D\in\mathcal{L}(M)^G$ に対し

$$(Df)(x)=(\rho_{a_x}{}^*Df)(x_0)=(D\rho_{a_x}{}^*f)(x_0)$$

$$= D_{x_0}(\rho_{a_x}{}^*f),$$

よって作用素 D は D_{x_0} により，したがって多項式 p_D により完全に定まる．

p_D，特に“頭部” $\bar{p}_D$ は多項式としてどんな条件をみたしているか？ $K = G_{x_0}$（x_0 の“固定部分群”）とおけば，$k \in K$ に対し，D の不変性から

$$\begin{aligned}(D_{x_0} \circ \rho_k{}^*)f &= (D\rho_k{}^*f)(x_0)\\ &= (\rho_k{}^*Df)(x_0) = (Df)(x_0) = D_{x_0}f.\end{aligned}$$

よって

$$D_{x_0} \circ \rho_k{}^* = D_{x_0} \qquad (k \in K) \tag{16}$$

が成立する．ρ_k の x_0 におけるヤコビアン行列を

$$\mathrm{Jac}(\rho_k)_{x=x_0} = \left(\frac{\partial x_i \circ \rho_k}{\partial x_j}\right)_{x=x_0} = (c_{ij}(k))$$

とおけば，一般に $D \circ \rho_k{}^*$ は (11) において $\varphi_{(\nu_i)}$ を $\varphi_{(\nu_i)} \circ \rho_k{}^*$，$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ を

$$\rho_k{}^{*-1} \circ \frac{\partial}{\partial x_i} \circ \rho_k{}^* = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial(x_j \circ \rho_k)}{\partial x_i}(k^{-1}x)\frac{\partial}{\partial x_j}$$

でおきかえたものであるから，その“頭部”は

$$\sum_{\Sigma \nu_i = m} \varphi_{(\nu_i)}(x_0) \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{j=1}^{N} c_{ji}(k) u_j\right)^{\nu_i} = \bar{p}_D\Big(\sum_j c_{j1}(k)u_j, \cdots\cdots, \sum_j c_{jN}(k)u_j\Big)$$

となる．よって D が G–不変のときには (16) から

$$\bar{p}_D\Big(\cdots\cdots, \sum_j c_{ji}(k)u_j, \cdots\cdots\Big) = \bar{p}_D(\cdots\cdots, u_i, \cdots\cdots) \tag{17}$$

が成立する．すなわち $\bar{p}_D(u)$ は K の表現 $(c_{ij}(k))\,(k \in K)$ に関する“不変式”でなければならない．[逆に任意の K–不変斉 m 次式 $F(u)$ に対して $\bar{p}_D(u) = F(u)$ となるような m 次の G–不変微分作用素 D の存在も証明できる．]

5. リー環の展開環

まず $G = M$, $\rho_a = \lambda_a$ の場合，$\mathcal{L}(G, \lambda_a)$ は G 上の“左不変”微分作用素全体の作る環である．これを普通 $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ とかく．これについて次のことが

いえる．

（i）$\mathfrak{g}_l \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$，しかも $X, Y \in \mathfrak{g}_l$ に対し $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ の中で $[X, Y] = XY - YX$．——これは明白．

（ii）$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ は $\mathfrak{g}_l$ と $\boldsymbol{R}$（定数関数）とによって生成される．

(ii) は $G = GL(n, \boldsymbol{R})$ の場合，次のようにして証明される．$D \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ を m 次とし m に関する帰納法を使う．$m = 0, 1$ 等のときは明白．$m > 1$ とし D の 1_n における頭部を

$$\bar{p}_D(u_{11}, \cdots, u_{nn}) = \sum_{(\nu_{ij})} \alpha_{(\nu_{ij})} \prod_{i,j=1}^{n} u_{ij}{}^{\nu_{ij}}$$

とする．(i,j) 成分が 1，他の成分がすべて 0 であるような n 次行列（“行列単位”）を E_{ij} とかけば

$$X_{E_{ij}} = \sum_{l=1}^{n} x_{li} \frac{\partial}{\partial x_{lj}}, \qquad p_{X_{E_{ij}}}(u) = u_{ij} \tag{18}$$

であるから

$$D' = \sum \alpha_{(\nu_{ij})} \prod_{i,j=1}^{n} X_{E_{ij}}{}^{\nu_{ij}}$$

（ただし右辺の積は適当な順序で作るものとする）とおけば，明らかに $D' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ で，$\bar{p}_{D'} = \bar{p}_D$ となる．したがって $D - D'$ は高々 $m-1$ 次の不変微分作用素となり，帰納法により証明が完成する．（一般のリー群に対しても同様の方針で証明できる．）

(iii) $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ は性質 (i), (ii) をもつ “多元環”（環であると同時に $\boldsymbol{R}$ 上のベクトル空間であるもの）の中でもっとも “普遍的”（universal）である．すなわち，今単位元1をもつ $\boldsymbol{R}$ 上の多元環 $\mathfrak{A}$ があり，$\mathfrak{g}_l$ から $\mathfrak{A}$ の中への線形写像 φ で

$$\varphi([X, Y]) = \varphi(X)\varphi(Y) - \varphi(Y)\varphi(X)$$

をみたすものが与えられているとする．そのとき，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ から $\mathfrak{A}$ の中への一次写像 $\tilde{\varphi}$ で

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(1) = 1, \qquad \tilde{\varphi}(X) = \varphi(X) \qquad (X \in \mathfrak{g}_l) \\ \tilde{\varphi}(DD') = \tilde{\varphi}(D)\tilde{\varphi}(D') \qquad (D, D' \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)) \end{cases}$$

をみたすものが（ただ一つ）定まる[†].

この"普遍性"（universality）により $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ はリー環 $\mathfrak{g}_l$ によって"代数的に"一意的に決まってしまうことがわかる．この意味で $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ をリー環 $\mathfrak{g}_l$ の**普遍展開環**（universal enveloping algebra）という．

前節の記号で $x_0 = 1_n$ とすれば，$K = \{1_n\}$ となってしまうから，$D \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ の 1_n における"頭部" $\bar{p}_D$ については何も条件がない．実際，$G = GL(n, \boldsymbol{R})$ の場合には $\bar{p}_D$ として $u_{ij}\,(i, j = 1, \cdots, n)$ に関する任意の斉 m 次式が生じる．一般の場合にも $\dim \mathfrak{g}_l = p$ とし，$(X_1, \cdots, X_p)$ を $\mathfrak{g}_l$ の底とすれば，$\mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g}_l) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l) \cap \mathcal{L}^{(m)}(G)$ とおくとき，$X_1^{\nu_1} \cdots X_p^{\nu_p} \left(\sum_{i=1}^{p} \nu_i = m \right)$ が $\bmod \mathfrak{U}^{(m-1)}(\mathfrak{g}_l)$ で $\mathfrak{U}^{(m)}(\mathfrak{g}_l)$ の底になることが証明される．これが**ポアンカレ-バーコフ-ウィット**（Poincaré-Birkhoff-Witt）**の定理**と呼ばれるものである．

リー環の普遍展開環は，リー群の表現論，特に最近発展しつつある無限次元表現論で非常に重要な役割を演じる．

6. カシミール作用素

G 上の不変微分作用素の重要な例としてカシミール作用素がある．今リー環 $\mathfrak{g}_l$ に一つの非退化な対称双一次形式 $S(X, Y)$ で，$\mathrm{ad}(a)$ $(a \in G)$ に対して不変なもの，すなわち

$$S((\mathrm{ad}\, a)X, (\mathrm{ad}\, a)Y) = S(X, Y) \qquad (a \in G,\ X, Y \in \mathfrak{g}_l) \tag{19}$$

をみたすものが与えられているとする．例えば $G = GL(n, \boldsymbol{R})$ のとき，$X = X_A$，$Y = Y_B \in \mathfrak{g}_l$ に対し

$$S(X, Y) = \mathrm{tr}(AB)$$

とおけば，確かに (19) が成立する．（一般に半単純リー群に対してはこのような内積が存在する．）

$(X_1, \cdots, X_p)$ を $\mathfrak{g}_l$ の任意の底，$(X_1', \cdots, X_p')$ を（S に関して）それと"双対的な底"とする．すなわち

---

†) (iii) の証明については例えば Varadarajan [6] 参照．

$$S(X_i, X_j') = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \cdots, p)$$

が成立し，この条件により (X_i') は (X_i) により一意的に定まる．そのとき，$\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ の中で

$$C = \sum_{i=1}^{p} X_i X_i' \tag{20}$$

とおけば，これが底 (X_i) のとり方に関係なく一意的に定まることがいえる．(証明してみよ．) C を G の**カシミール** (Casimir) **作用素**という．

さて **2** で述べた共役表現の拡張として，$a \in G$, $D \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ に対し

$$(\mathrm{ad}\, a)D = \nu_a{}^{*-1} D \nu_a{}^* \ (= \mu_a{}^* D \mu_a{}^{*-1}) \tag{21}$$

とおけば，明らかに $(\mathrm{ad}\, a)D \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ で，この $\mathrm{ad}\, a$ は $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ の（多元環としての）自己同型になる．これは $\mathfrak{g}_l$ における共役表現 $\mathrm{ad}\, a$ の $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ への自然な（一意的な）拡張である．

上記のように双対的な底 $(X_i), (X_i')$ をとれば (19) から明らかなように $((\mathrm{ad}\, a)X_i)$, $((\mathrm{ad}\, a)X_i')$ も互に双対的な底になる．よって C が底のとり方に依存しないことから

$$\begin{aligned} C &= \sum ((\mathrm{ad}\, a)X_i)((\mathrm{ad}\, a)X_i') \\ &= (\mathrm{ad}\, a)C, \end{aligned}$$

すなわち C はすべての $\mathrm{ad}\, a\,(a \in G)$ に対して不変である．いいかえれば C はすべての $\mu_a{}^*\,(a \in G)$ と可換であり，"両側不変" な微分作用素であることがわかる．このことからさらに C がすべての $X \in \mathfrak{g}_l$ とも可換，したがって $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_l)$ の（多元環としての）"中心" に入っていることもわかる．

第13章　$\mathcal{P}_n(\boldsymbol{R})$ 上の不変微分作用素

1. $\mathcal{P}_n(\boldsymbol{R})$ の場合

最後に $\mathcal{P}^{(n)}=\mathcal{P}_n(\boldsymbol{R})$ の上の不変微分作用素環を決定してこの「話」を終りたいと思う．$G=GL(n,\boldsymbol{R})$, $M=\mathcal{P}^{(n)}$ とし，以前のように G は $\mathcal{P}^{(n)}$ に

$$\rho_a{}':\ x\longmapsto ax{}^t a\qquad (a\in G,\ x\in\mathcal{P}^{(n)})$$

によって作用しているとする．この場合，次のようにして不変微分作用素を作ることができる．

$x=(x_{ij})\in\mathcal{P}^{(n)}$ の座標のうち $x_{ij}\,(i\leqq j)$ を独立変数と考えて，記号的に

$$(1)\qquad \frac{\partial}{\partial x}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_{11}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{12}} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{1n}} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{12}} & \dfrac{\partial}{\partial x_{22}} & \cdots\cdots & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{1n}} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{2n}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial}{\partial x_{nn}} \end{pmatrix}$$

とおく．すなわち，$\dfrac{\partial}{\partial x}$ の (i,j) 成分は，$i=j$ ならば $\dfrac{\partial}{\partial x_{ii}}$，$i\neq j$ ならば $\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{ij}}\left(=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial x_{ji}}\right)$ である．$\dfrac{\partial}{\partial x}$ は作用素を成分にもつ n 次対称行列，したがって $f\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}^{(n)})$ に対して $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ が定義されて $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ の元になる．任意の $a=(a_{ij})\in\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ に対し

$$(2)\qquad \operatorname{tr}\left(a\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\sum_{i\leqslant j}a_{ij}\,\frac{\partial f}{\partial x_{ij}} = \frac{d}{d\lambda}f(x+\lambda a)\Big|_{\lambda=0}$$

は f の“a の方向”の微分である．

前に計算したように，$f\in\mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}^{(n)})$, $a=(a_{ij})\in G$ に対して

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\circ\rho_a{}'^*\right)f\right)(x)=\frac{\partial}{\partial x_{ij}}(f(ax^ta))$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k\leqslant l}a_{ki}a_{li}\left(\frac{\partial f}{\partial x_{kl}}\right)(ax^ta) & (i=j)\\ \displaystyle\sum_{k\leqslant l}(a_{ki}a_{lj}+a_{kj}a_{li})\left(\frac{\partial f}{\partial x_{kl}}\right)(ax^ta) & (i\neq j)\end{cases}$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\circ\rho_a{}'^*=\rho_a{}'^*\circ\left({}^ta\frac{\partial}{\partial x}a\right)_{ij},$$

したがって記号的に

$$(3)\qquad \rho_a{}'^{*-1}\circ\frac{\partial}{\partial x}\circ\rho_a{}'^*={}^ta\frac{\partial}{\partial x}a$$

という関係が得られる．(右辺の積は行列の積であって，${}^ta\dfrac{\partial}{\partial x}a$ も作用素を成分にもつ行列と考えるのである．)

一方，変数 x_{ij} の乗法によって定義される作用素（それを単に x_{ij} とかく）に関して

$$((x_{ij}\circ\rho_a{}'^*)f)(x)=x_{ij}f(ax^ta),$$

$$((\rho_a{}'^*\circ x_{ij})f)(x)=(ax^ta)_{ij}f(ax^ta)=\sum_{k,l=1}^{n}a_{ik}x_{kl}a_{jl}f(ax^ta)$$

であるから

$$\rho_a{}'^{*-1}\circ x_{ij}\circ\rho_a{}'^*=(a^{-1}x^ta^{-1})_{ij}.$$

x を，作用素 x_{ij} を (i,j) 成分とする行列とみれば，この関係を記号的に

$$(4)\qquad \rho_a{}'^{*-1}\circ x\circ\rho_a{}'^*=a^{-1}x^ta^{-1}$$

とかくことができる．

(3) と (4) から（作用素行列としての積[†]を作ることにより）

$$\rho_a{}'^{*-1}\circ x\frac{\partial}{\partial x}\circ\rho_a{}'^{*}=a^{-1}\cdot x\frac{\partial}{\partial x}\cdot a, \tag{5}$$

したがって一般に（作用素行列としての巾を作ることにより）

$$\rho_a{}'^{*-1}\circ\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\circ\rho_a{}'^{*}=a^{-1}\cdot\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\cdot a$$

を得る．よって

$$D_k=\mathrm{tr}\left(\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^k\right)\qquad(k=1,2,\cdots) \tag{6}$$

とおけば，上式の両辺のトレイスをとることにより

$$\rho_a{}'^{*-1}\circ D_k\circ\rho_a{}'^{*}=D_k$$

を得るから，D_k は k 次の不変微分作用素である．特に，$D_1=\mathrm{tr}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)=\sum_{i\leqslant j}x_{ij}\frac{\partial}{\partial x_{ij}}$ は前に述べたオイラーの作用素に他ならない．

$\mathcal{P}^{(n)}$ の不変微分作用素の環 $\mathcal{L}(\mathcal{P}^{(n)})^G$ を簡単のため $\mathcal{I}$ とおく．$\mathcal{I}$ に関して次のような結果が得られる[††]．

定理 1. $\mathcal{I}$ は（$\boldsymbol{R}$ と）$D_1,\cdots,D_n$ によって生成される．

定理 2. 対応 $D_i\longrightarrow z_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ により $\mathcal{I}$ は多項式環 $\boldsymbol{R}[z_1,\cdots,z_n]$ と同型になる．特に $\mathcal{I}$ は可換である．

後に述べるようにこれらは“対称空間”に関するより一般な定理の特別な場合である．

---

†) 二つの作用素行列 (D_{ij}), $(D_{ij}{}')$ が与えられたとき，二通りの積が考えられる．すなわち，代数的（形式的）な積 $(\sum_{k=1}^n D_{ik}D_{kj}{}')$ と作用素行列としての（合成）積 $(\sum_{k=1}^n D_{ik}\circ D_{kj}{}')$ の二つである．積 $x\frac{\partial}{\partial x}$ の場合両者は一致するが，積 $\frac{\partial}{\partial x}x$ の場合には相異なる．

††) H. Maass の講義録：Siegel modular forms and Dirichlet series, Lect. Notes in Math., No. **216**, Springer, 1971 参照．

2. 定理1の証明

まず D_k の 1_n における“頭部”を計算する．定義式 (6) から

$$D_k = \sum_{(j_\nu)} 2^{-\mu((j_\nu))} x_{ij_1} \frac{\partial}{\partial x_{j_1j_2}} x_{j_2j_3} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{j_{2k-1},i}}.$$

ここに積は合成積，また和 $\sum_{(j_\nu)}$ において $i(=j_0), j_1, \cdots, j_{2k-1}$ は独立に 1 から n まで動くとし，$\mu((j_\nu)) = \mu(j_0, j_1, \cdots, j_{2k-1})$ は奇数 ν で

$$1 \leqslant \nu \leqslant 2k-1, \qquad j_\nu \neq j_{\nu+1}$$

となるようなものの個数を表わす．（ただし $j_{2k} = i = j_0$ とおく．）そのとき D_k の 1_n における頭部は定義により

$$\bar{p}_{D_k}(\cdots, u_{ij}, \cdots) = \sum_{(j_\nu)}{}' 2^{-\mu((j_\nu))} u_{j_1j_2} \cdots u_{j_{2k-1}j_{2k}}, \tag{7}$$

和 $\sum'$ は $j_0 = j_1, \cdots, j_{2k-2} = j_{2k-1}$ となるような (j_ν) にわたる．$\bar{p}_{D_k}$ は u_{ij} $(i \leqslant j)$ に関する k 次の斉次多項式である．（ここでも $u_{ij} = u_{ji}$ とおく．）$\bar{p}_{D_k}(\cdots, u_{ij}, \cdots)$ において

$$u_{ij} = 0 \quad (i \neq j), \qquad u_{ii} = u_i$$

とおいて得られる $u_1, \cdots, u_n$ の多項式を $\bar{p}_{D_k}{}^\circ$ とかけば (7) から

$$\bar{p}_{D_k}{}^\circ(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{i=1}^{n} u_i{}^k \tag{8}$$

を得る．

さて，$\mathcal{I}$ の中で高々 m 次の微分作用素の作る部分空間を $\mathcal{I}^{(m)}$ とかき，$\mathcal{I}^{(m)}$ の元が $D_1, \cdots, D_n$ の定数係数の多項式として表わされることを m に関する帰納法で証明しよう．$m=0$ のとき，$\mathcal{I}^{(0)}$ は $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{P}^{(n)})$ の元で G–不変なもの，すなわち定数関数，からなるゆえ上記の主張は自明である．$m>0$ とし，$m-1$ まで上の主張が正しいと仮定する．$D \in \mathcal{I}^{(m)}$ に対し，p_D の斉 m 次の部分を $p_D{}^{(m)}$，さらに $p_D{}^{(m)}$ において $u_{ii} = u_i$, $u_{ij} = 0\,(i<j)$ とおいて得られる $u_1, \cdots, u_n$ の多項式を $(p_D{}^{(m)})^\circ$ とおく．前章で説明したように p_D（したがって $p_D{}^{(m)}$）は $K=O(n)$ に関して不変な多項式，したがって $(p_D{}^{(m)})^\circ$ は $u_1, \cdots, u_n$ に関する対称式になる．（$O(n)$ は置換の行列を含むから．）しかも $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ の任意の元が K に関して対角行列に同値になることから，もし $(p_D{}^{(m)})^\circ \equiv 0$（恒等的に零）ならば，$p_D{}^{(m)} \equiv 0$，し

たがって（G が $\mathcal{P}^{(n)}$ 上に推移的に作用していることから）$D \in \mathscr{I}^{(m-1)}$ となる．

さて，与えられた $D \in \mathscr{I}^{(m)}$ に対し，対称式の理論から $(p_D{}^{(m)})^\circ$ を巾の和

$$\sigma_k(u) = \sum_{i=1}^{n} u_i{}^k \qquad (k = 1, \cdots, n)$$

の多項式として表わすことができる．精しくいえば

$$(p_D{}^{(m)})^\circ(u_1, \cdots, u_n) = F(\sigma_1(u), \cdots, \sigma_n(u)) \tag{9}$$

となるような重さ m の“斉重多項式” $F(v_1, \cdots, v_n)$ が存在する．（すなわち，F は

$$v_1{}^{\nu_1} \cdots v_n{}^{\nu_n}, \qquad \nu_1 + 2\nu_2 + \cdots + n\nu_n = m \tag{10}$$

の形の項のみからなる多項式である．）そこで $D' = F(D_1, \cdots, D_n)$ とおけば，$D' \in \mathscr{I}^{(m)}$ で

$$p_{D'}{}^{(m)}(\cdots, u_{ij}, \cdots) = F(\bar{p}_{D_1}, \cdots, \bar{p}_{D_n})$$

となる．[$D_1, \cdots, D_n$ の可換性は未知なので，F に D_i を“代入”するときには適当に順序を決めて積を作る，例えば (10) の形の項には $D_1{}^{\nu_1} \cdots D_n{}^{\nu_n}$ を代入する.] 上式と (8) により

$$\begin{aligned}(p_{D'}{}^{(m)})^\circ &= F(\bar{p}_{D_1}{}^\circ, \cdots, \bar{p}_{D_n}{}^\circ) \\ &= F(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = (p_D{}^{(m)})^\circ\end{aligned}$$

を得る．よって上記により $D - D' \in \mathscr{I}^{(m-1)}$，したがって帰納法の仮定により $D - D'$ は $D_1, \cdots, D_n$ の多項式として表わされる．よって D に対しても同じことがいえる．——これで定理 1 が証明された．

3. $\mathscr{I}$ の同時固有関数

定理 2 を証明するために，$\mathscr{I}$ の同時固有関数を利用して $\mathscr{I}$ からある多項式環の中へ（環の）同型が存在することを示す．（対応 $D \longmapsto p_D$ は線形，1 対 1 ではあるが，環の同型にならない.）

一般に（必ずしも対称でない）n 次行列 $x = (x_{ij})$ に対し，その左上の ν 次“主小行列”を $x^{(\nu)}$ とかく：

$$x^{(\nu)} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots\cdots & x_{1\nu} \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_{\nu 1} & \cdots\cdots & x_{\nu\nu} \end{pmatrix}.$$

$x \in \mathcal{P}^{(n)}$, $s = (s_1, \cdots, s_n) \in \boldsymbol{R}^n$ に対し

$$(11) \qquad f_s(x) = \left(\prod_{\nu=1}^{n-1} \det(x^{(\nu)})^{s_\nu - s_{\nu+1} - \frac{1}{2}}\right) \cdot \det(x)^{s_n - \frac{1}{2}}$$

とおく．すべての ν に対し $x^{(\nu)} \in \mathcal{P}^{(\nu)}$ であるから，$f_s(x) > 0$ である．また

$$(12) \qquad a = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha_i > 0$$

に対し

$$(13) \qquad \chi_s(a) = \prod_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu{}^{s_\nu - \frac{1}{2}(n-\nu+1)}$$

とおく．（なぜこうおくか？　以下の証明をみてなるほどと思っていただく他ない．）そのとき

$$(14) \qquad f_s(ax{}^ta) = \chi_s(a)^2 f_s(x)$$

が成立する．実際，$x' = ax{}^ta$ とおけば，a の形から

$$x'^{(\nu)} = a^{(\nu)} x^{(\nu)}\, {}^ta^{(\nu)},$$

したがって

$$\det(x'^{(\nu)}) = \left(\prod_{i=1}^{\nu} \alpha_i\right)^2 \det(x^{(\nu)}).$$

よって (11), (13) から (14) を得る．

さて，$D \in \mathcal{I}$ とすれば，(14) から

$$\rho_a{}'^* D f_s = D \rho_a{}'^* f_s = \chi_s(a)^2 D f_s.$$

よって Df_s/f_s は $\rho_a{}'^*$ に対して不変である．今 (12) の形の n 次行列 a（"下半三角行列"）全体が作る群を H とおけば，任意の $x \in \mathcal{P}^{(n)}$ は $x = a{}^ta$ ($a \in H$) の形に一意的に表わされる．（証明してみよ．）したがって H は（$\rho_a{}'$ により）$\mathcal{P}^{(n)}$ に推移的に（実際は "単純推移的" に）作用している．よって上のことから Df_s/f_s は（s によって定まる）定数でなければならな

い．それを $\lambda_D(s)$ とかくことにする．すなわち

(15) $$Df_s = \lambda_D(s) f_s \qquad (D \in \mathscr{I},\ s \in \boldsymbol{R}^n).$$

この式は f_s がすべての $D \in \mathscr{I}$ に対する同時固有関数であることを示している．(15) から明らかに

(16) $$\lambda_{D+D'} = \lambda_D + \lambda_{D'}, \qquad \lambda_{DD'} = \lambda_D \cdot \lambda_{D'}$$

等が成立する．

4. 定理２の証明

補題． $\lambda_{D_k}(s)$ は $s_1, \cdots, s_n$ に関する k 次多項式で，その斉 k 次の部分は $\sigma_k(s) = \sum_{i=1}^{n} s_i{}^k$ によって与えられる．

この証明はかなり長くなるので省略し，$n = 1, 2,\ k \leqslant n$ の場合の λ_{D_k} の具体的な形をあげておくに止める．以下，$x_{ii} = x_i$ とおく．

$n = 1$ の場合：$D_1 = x_1 \dfrac{d}{dx_1}$，$f_s(x) = x_1{}^{s_1 - \frac{1}{2}}$．

$$\lambda_{D_1} = s_1 - \frac{1}{2}.$$

$n = 2$ の場合：$D_1 = x_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + x_2 \dfrac{\partial}{\partial x_2} + x_{12} \dfrac{\partial}{\partial x_{12}}$,

$$D_2 = \mathrm{tr}\left(\left(x \frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right)$$

$$= x_1{}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2} + x_2{}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2} + \frac{1}{2}(x_1 x_2 + x_{12}{}^2) \frac{\partial^2}{\partial x_{12}{}^2}$$

$$+ 2x_{12}{}^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + 2x_1 x_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_{12}} + 2x_2 x_{12} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_{12}} + \frac{3}{2} D_1,$$

$$f_s(x) = x_1{}^{s_1 - s_2 - \frac{1}{2}} (x_1 x_2 - x_{12}{}^2)^{s_2 - \frac{1}{2}},$$

$$\lambda_{D_1}(s) = s_1 + s_2 - \frac{3}{2},$$

$$\lambda_{D_2}(s) = s_1{}^2 + s_2{}^2 - \frac{3}{2}(s_1 + s_2) + 1.$$

さて，一般に $D \in \mathscr{I}^{(m)}$ に対して

(i) $\lambda_D(s)$ は $s_1, \cdots, s_n$ に関する高々 m 次の対称式である．

（ii）D が（ちょうど）m 次ならば，$\lambda_D(s)$ も m 次である．

が成立することを，m に関する帰納法で証明する．$m=0$ のとき，$D=c$（定数）であるから，$\lambda_D(s)=c$ となり，(i),(ii) は自明である．$m-1$ まで上の主張が正しいとし，$D\in\mathcal{I}^{(m)}$ に対し，定理1の証明におけると同様に $D'=F(D_1,\cdots,D_n)$ を定義する．そのとき $D''=D-D'\in\mathcal{I}^{(m-1)}$ であるから，帰納法の仮定により $\lambda_{D''}$ は $s_1,\cdots,s_n$ に関する高々 $m-1$ 次の対称式である．(16) により

$$\lambda_D=\lambda_{D'}+\lambda_{D''}=F(\lambda_{D_1},\cdots,\lambda_{D_n})+\lambda_{D''}.$$

補題により $\lambda_{D_1},\cdots,\lambda_{D_n}$ は $s_1,\cdots,s_n$ の対称式であるから，λ_D もそうなる．もし D がちょうど m 次ならば，多項式 F は（恒等的に）0 ではなく，$F(\lambda_{D_1},\cdots,\lambda_{D_n})$ の $s_1,\cdots,s_n$ に関する斉 m 次の項は $F(\sigma_1(s),\cdots,\sigma_n(s))$ で与えられる．それは $s_1,\cdots,s_n$ の多項式としても（恒等的に）0 ではない．よって λ_D もちょうど m 次である．——これで (i),(ii) が証明された．

変数 $s_1,\cdots,s_n$ に関する実係数の多項式全体の作る環を $\boldsymbol{R}[s_1,\cdots,s_n]$，特にその中で対称式全体の作る部分環を $\boldsymbol{R}[s_1,\cdots,s_n]^{\mathfrak{S}_n}$ とかく．上の証明でも使ったように，任意の $P(s_1,\cdots,s_n)\in\boldsymbol{R}[s_1,\cdots,s_n]^{\mathfrak{S}_n}$ は $\sigma_1(s),\cdots,\sigma_n(s)$ の多項式として（一意的に）表わされ，したがって補題により，$\lambda_{D_1},\cdots,\lambda_{D_n}$ の多項式としても（一意的に）表わされることが証明される．すなわち

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}[s_1,\cdots,s_n]^{\mathfrak{S}_n}&=\boldsymbol{R}[\sigma_1,\cdots,\sigma_n]\\&=\boldsymbol{R}[\lambda_{D_1},\cdots,\lambda_{D_n}].\end{aligned}$$

よって上の補題と (i),(ii) により，対応 $D\longmapsto\lambda_D$ は $\mathcal{I}$ から $\boldsymbol{R}[s_1,\cdots,s_n]^{\mathfrak{S}_n}$ の上への1対1写像で，(16) をみたす．したがってそれは環の同型である．これで定理2も証明された．

練習問題 1. $\Delta_n=\det(x)\det\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ は $\mathcal{P}^{(n)}$ 上の n 次の不変微分作用素であることを示せ．$n=2$ のとき，Δ_2 を D_1,D_2 の多項式として表わせ．

［答は $\Delta_2=\dfrac{1}{2}(D_1{}^2-D_2)+\dfrac{1}{4}D_1.$］

5. 対称リーマン空間

変数 x_{ij} の“微分” dx_{ij} を成分にもつ行列 (dx_{ij}) を形式的に dx とかく．変換 $x \longmapsto \rho_a'(x) = ax{}^ta$ に対し

$$dx \longmapsto adx{}^ta$$

であるから，$x^{-1}dx$ を考えると

$$x^{-1}dx \longmapsto {}^ta^{-1}(x^{-1}dx){}^ta. \tag{17}$$

よって（正確な定義は省略するが）k 次の“微分多項式” $\mathrm{tr}((x^{-1}dx)^k)$ は G-不変である．特に

$$ds^2 = \mathrm{tr}((x^{-1}dx)^2) \tag{18}$$

は $\mathcal{P}^{(n)}$ の不変な“リーマン距離”になることが証明される†)．

さらに変換 ι: $x \longmapsto x^{-1}$ に対して

$$dx \longmapsto -x^{-1}\cdot dx \cdot x^{-1},$$

$$x^{-1}dx \longmapsto -dx\cdot x^{-1}$$

であるから，上記 ds^2 は ι に対しても不変である．いいかえれば，ι は $\mathcal{P}^{(n)}$ の“等長変換”（リーマン距離を変えない変換）である．

定義から明らかなように，ι は $\iota^2 = \mathrm{id}$ で

$$\iota x = x \Longleftrightarrow x = 1_n$$

という性質をもっている．一般に $x_0 \in \mathcal{P}^{(n)}$ に対し，$x_0 = a{}^ta$ となるような $a \in G$ をとり，$\iota_{x_0} = \rho_a' \circ \iota \circ \rho_a'^{-1}$ とおけば，ι_{x_0} も $\mathcal{P}^{(n)}$ の等長変換で

$$\begin{cases} \iota_{x_0}{}^2 = \mathrm{id}, \\ \iota_{x_0} x = x \Longleftrightarrow x = x_0 \end{cases} \tag{19}$$

が成立する．このような変換（それは一意的に定まる）を x_0 を中心とする**点対称**（symmetry）という．

一般に各点がその点を中心とする点対称をもつようなリーマン空間を**対称リーマン空間**という．G を（これもこの本では未定義だが）“半単純”な行列のリー群（あるいはより一般に $\boldsymbol{R}$ 上の reductive な代数群），K をその極大コンパクト部分群とすれば，第8章に述べたようなカルタン分解 $G=$

---

†) リーマン空間，特に対称リーマン空間の理論に関しては Helgason [7] 参照．

$K\cdot\mathcal{P}$ が得られる．そのとき，$\mathcal{P}=G/K$ 上には本質的にただ一つの不変リーマン距離が存在し，それに関して $\mathcal{P}$ が対称リーマン空間になることが知られている．（逆に曲率が負の対称リーマン空間はすべてこのようにして得られる．）定理2はこの一般の場合にも成立する．すなわち，Gの“階数”（第9章）を r とすれば，$\mathcal{P}$ 上の不変微分作用素の環 $\mathcal{I}=\mathcal{L}(\mathcal{P})^G$ は r 変数の多項式環と同型になるのである[†]．

練習問題 2. 次の関係式を証明せよ：

$$\iota^*\circ x\frac{\partial}{\partial x}\circ\iota^*=-\frac{\partial}{\partial x}x, \tag{20}$$

$$\iota^*\circ D_k\circ\iota^*=(-1)^k D_k \qquad (k=1,2). \tag{21}$$

［ただし (20) の右辺の積は“代数的な”積である．p. 153 の脚註参照．］

文　献

1. まずこれからリー群を学ばれる方のためにいくつか標準的教科書をあげておこう．

［1］ 村上信吾，連続群論の基礎，朝倉書店，1973.

［2］ 松島与三，多様体入門，裳華房，1965.

［3］ 松島与三，リー環論（現代数学講座 3-A），共立出版，1956.

［4］ L. S. Pontrjagin, Topological Groups, Princeton Univ. Press, 1939; 2nd ed., Gordon and Breach, New York, 1966;（柴岡・杉浦・宮崎共訳）連続群論，上，下，岩波書店，1964.

［5］ C. Chevalley, Theory of Lie Groups, I, Princeton Univ. Press, 1946.

［6］ V. S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras, and their Representations, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.

［7］ S. Helgason, Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric

†) この一般定理は Harish-Chandra (Amer. J. Math. **80** (1958), 241–310) による．

Spaces, Academic Press, New York-San Francisco-London, 1978.

[8] J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1972.

リー群論への入門書としては [1], [2], [4], [5] 等をおすすめしたい. [6], [7] はより専門的な本である. リー群論を学ぶためには, どうしても位相群, 多様体についての予備知識が必要であるが, 位相群については [1], [4], 多様体については [2], [6] に精しい. [5] はリー群に関するいわば "最初" の成書であるが, 位相群, 多様体に関する最小限度の準備から, コンパクト群に関する重要な結果まで, 僅少なページ数の中に非常によくまとめられている.

この「話」の前半の主題であったリー群とリー環との対応については, [1], [2], [5], [6], [7] いずれにも説明されている. 特に Hausdorff の公式については [6] 参照.

この「話」を『数学セミナー』に執筆中, 思いがけなく吉田耕作先生からお手紙をいただき, これらの話題について先生の昔のお仕事があることを教えていただいた. その一部をここに引用しておきたい.

K. Yosida, Proc. Imp. Acad. Tokyo **13** (1936), 152–155, 301–304; Tôhoku Math. J. **43** (1937), 81–84.

リー群とリー環の対応が確立すれば, リー群論の主要な部分, 特に "半単純" リー群の構造や表現論は, 原理的に対応するリー環の純代数的な議論に帰着される. もちろんリー群と独立に, (抽象的な) リー環論だけを先に学ぶことも可能である. 半単純環論まで含むリー環の教科書としては [3], [8] がある. [6], [7] にも半単純環論が含まれている. 特に [7] には実半単純リー群 (環) がそれに対応する "対称リーマン空間" とともに精しく論じられている.

2. この「話」の主役であった $SL(n, \boldsymbol{R})$ や $O(n)$ は半単純群の中で特に "古典群" と呼ばれるものの例である. これについては

[9] H. Weyl, The Classical Groups (Their Invariants and Represen-

tations), Princeton Univ. Press, 1939.

[10] C. L. Siegel, Symplectic Geometry, Acad. Press, New York-London. 1964.†)

を引用したい．[9] は古典群に関する“古典”でリー群の一般論には吸収しきれない豊富な内容をもっている．[10] には特に $Sp(2n, \boldsymbol{R})$ に対応する対称空間，いわゆる“ジーゲル空間”について，その幾何学の直接的展開，さらにその上に作用する“数論的”不連続群が精しく論じられている．

リー群を学ばれる方は一般論と同時にこれらの本によっていろいろなリー群の“個性”を体得されることも大切であると思う．

不変微分作用素の話（第11～13章）では，これら古典群の表現や“不変量”が重要な役割を演じていることを見られたはずである．一方，対称空間上の不変微分作用素については A. Selberg の有名な論文（J. Indian Math. Soc. **20** (1956), 47–84）の中で，より一般な“弱対称空間”上の調和解析の一部として論じられている．（原文はあまり読み易くないが，幸い久賀道郎氏による懇切な解説が『数学』**9** (1958), 166–185，および赤倉セミナー報告Ⅵ，「球函数と代数群」，1959，37–94 にある．）††)

なお，この「話」とやや類似の趣旨によって書かれたと思われる入門書二つをあげておく．

[11] 山内恭彦・杉浦光夫，連続群論入門，培風館，1960.

[12] M. L. Curtis, Matrix Groups, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1979.

†) Siegel 先生は 1981 年 4 月 4 日 84 歳で Göttingen において亡くなられた．

††) Siegel や Selberg はリー群の整数論的理論，“不連続群”を開拓し，現代の保型関数論への転機を与えた．これについては本書，「マルグリス」参照．

線形代数雑談

I

マトリックスとは何か？

これから数回にわたって，“線形代数”（つまりベクトルやマトリックスの代数）をすでに学ばれた方々，あるいは今学びつつある方々を対象に，その中に含まれる（あるいは含ませてもよい）いくつかの話題について書いてみたいと思う．これらの話題はいわば第二次的な要点であって，数学の専門家にとってはすべて常識に過ぎないが，普通の線形代数の講義では余り精しく話されないか，全く省略されてしまうたぐいのことである．しかしこれらの諸点を明らかにすることは線形代数の骨組み，あるいはその拡りというものを知るために役立つのではないかと思う．

1．B君の疑問（B君は大学生，A氏はその叔父である数学者）

B「おじさん，今日は．今日はひとつ数学の質問をしたいんですが．」

A「いいとも．僕に答えられることならね．以前君が受験数学の難問を持ってきたときにはおじさんも完全にお手挙げだったからなあ．」

B「今日はもう少し高級な質問です．おじさん，一体マトリックスとは何ですか？」

A「マトリックスとは数または文字を矩形いや長方形に並べたもののことだ．」

B「おじさん，僕はそんな trivial なことをきいているんじゃありません．今学校で線形代数をやっているんですが，色々なマトリックスがやたらと沢山でてきます．それでかえってマトリックスの本性というものが判らなくなってきて困っているんです．」

A「なるほど，それは少し深刻だな．それじゃまずどんなマトリックスを習ったかいってごらん．」

B「えーと，対角行列，三角行列，巾零行列，巾等行列．それに対称行列，交代行列，ヘルメット行列，…」

A「おいおい，物騒なことをいっては困るよ．それはエルミット行列の間違いじゃないのか．」

B「あっ，そうか．それに直交行列，ユニタリ行列，…」

A「その辺でもう沢山だ．それをいちいち説明していたんでは線形代数総復習になってしまって「雑談」ということにはならん．」

B「え，何ですって．」

A「いや，こちらの話だ．ところで行列の種類は無数にあるが，しかし行列の機能というか，それがどういう数学的対象を表わすために使われるかという面から大別すればそんなに沢山はないと思う．それを一つ考えてみよう．」

B「まず第一に行列は線形写像（一次写像）を表わすのに使われるでしょう．」

A「その通り．精しくいえば一つのベクトル空間から第二のベクトル空間の中への一次写像を表わす場合と，一つのベクトル空間からそれ自身の中への一次写像を表わす場合とがある．後の場合を“一次変換”といって区別する人もいる．その場合にはもちろん正方行列が対応するわけだ．」

B「底の変換の行列というのもありましたね．」

A「うむ，それも正方行列，しかも正則なやつだ．その他に双一次形式や二次形式，さらにエルミット形式を表わす行列というのがある．」

B「ええ，今ちょうどそれを習っているところです．」

A「それでは，一次変換と二次形式を表わす行列の性質の相違は一体何だろう？」

B「一次変換の行列のときには積には積が対応したでしょう．ところが二次形式の行列の方は積が作れません．二次形式の積を作ると四次形式になってしまうし，二つの対称行列の積は必ずしも対称でない！」

A「ほほう，君の考え方はずいぶん現実的なんだね．“標準形”のところで何か気がつかなかったかね．」

B「そういえば標準形の出し方が大分違っていたようです．先生は実対称行列の標準形は Jordan（ジョルダン）標準形の特別な場合だとおっしゃいましたが，少し納得できなかったのを覚えています．」

A「うむ，そこはちょっと微妙なところだ．実際，双一次形式や二次形式を表わす行列と一次写像の行列とは少し性質が違う，つまり変換法則が違うのだ．これをペダンチックにいえば，別種のテンソルだということになる．」

B「え，テンソルですって？　そんなものまだ全然聞いたことがありません．それに変換法則が異なるといっても確か同じ形をしていたように思いますが．」

A「それは直交変換を使った時には確かに同じになる．しかし一般の底の変換を使えばその相違がはっきりわかるはずだ．したがって行列の“標準形”といってもその解釈によって色々なものがあるのだ．どうだ，急がないんだったらその辺のところをもう少し精しく話してみようか．」

…というわけで A 氏が B 君に試みた講義の内容を以下に記そう．

2. 一次写像と行列

まず話の順序として少し定義を復習しよう．数学ではいつでも定義にもどって考えることが大切だし，定義と同時に色々な記号を定めてゆくこともゆるがせにはできないステップなのだ．

mn 個の数を m 行 n 列の長方形に並べたものを (m, n)-型の行列，略して (m, n)-行列という．（米国では $m\times n$ matrix という．）$m=n$ なら勿論それは正方形になるから n 次の“正方行列”という．一般の (m, n)-行列を

$$A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

あるいは略して $A=(\alpha_{ij})$ のように記す．これは A の (i,j)–成分（つまり第 i 行と第 j 列の交叉点にある数）が α_{ij} であることを示す．ここで数（あるいはスカラー）というのは実数や複素数のことだと思ってもよいが，もっと一般にある“体” K（つまり実数や複素数と同じような四則演算の定義されている集合）の元であると思ってもよい[†)]．しかし大切なことはその体 K は以下の議論の間中固定しておいて勝手には変えないということだ．スカラーをギリシャ文字 $\alpha,\beta,\cdots,\xi,\eta,\cdots$ 等で表わすことにする．

さて V を（K 上の）“ベクトル空間”とする．つまり集合 V に二つの演算

加法：　$V\ni x,x'\longmapsto x+x'\in V,$

スカラー乗法：　$K\ni\alpha,\ V\ni x\longmapsto \alpha x\in V$

が定義されていて例のベクトル空間の公理をみたすものとする．ベクトル（すなわちあるベクトル空間の元）をローマ字 $a,b,\cdots,x,y,\cdots$ 等で表わす．ベクトル空間 V が“n 次元”であるというのは，V の中に n 個の一次独立な元 $a_1,\cdots,a_n$ が存在し，V の任意の元 x が

$$x=\xi_1a_1+\cdots+\xi_na_n\qquad(\xi_i\in K)\tag{1}$$

の形に（ただ一通りに）表わされることをいう．このような n 個のベクトルの組 $(a_1,\cdots,a_n)$（略して (a_i)）を V の“底”（または基底）という．(1) のような表わし方はただ一通りだから $x\in V$ に（縦の）数ベクトル

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}\qquad（あるいは略して\ (\xi_i)）$$

を対応させることができる．これを仮に x の“成分ベクトル”ということにしよう．また (1) を記号的に

$$x=(a_i)(\xi_i)\tag{1'}$$

と略記することにしよう．

さて，W を m 次元のベクトル空間とする．（$W=V$ でもよい．）V から W の中への写像 f が“線形”または“一次写像”であるというのは，

†) 「雑談」VI p.220 の脚註参照.

f がベクトル空間の演算を保存すること，すなわち条件

$$(2)\qquad \begin{cases} f(x+x') = f(x)+f(x'), \\ f(\alpha x) = \alpha f(x) \end{cases}$$
$$(x, x' \in V,\ \alpha \in K)$$

をみたすことをいう．今，V の底 (a_i) と W の底 $(b_i)\,(=(b_1, \cdots, b_m))$ を(任意にえらんで) 固定しておけば，一次写像 $f: V \longrightarrow W$ が与えられたとき，$f(a_j)\,(1 \leqslant j \leqslant n)$ は W の元であるから底 (b_i) の一次結合として

$$(3)\qquad f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} b_i$$

の形に一意的に表わされる．従って f に (m, n)-行列 $A = (\alpha_{ij})$ を対応させることができる．(3) を記号的に

$$(f(a_1), \cdots, f(a_n)) = (b_1, \cdots, b_m)\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ & \cdots & \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix},$$

または略して

$$(3')\qquad f((a_i)) = (b_i)A$$

とかく．

さて $x \in V$ の (底 (a_i) に関する) 成分ベクトルが (ξ_i) ならば，f が線形であることから

$$f(x) = f((a_i)(\xi_i)) = f((a_i))(\xi_i)$$
$$= (b_i)A(\xi_i).^{\dagger)}$$

これは $f(x)$ の (底 (b_i) に関する) 成分ベクトルが $A(\xi_i)$ であることを示す．すなわち一次写像 $x \longmapsto f(x)$ は，対応する成分ベクトルに関しては，(m, n)-行列 A の左乗：

$$(4)\qquad (\xi_i) \longmapsto A(\xi_i)$$

によって表現される．これが一次写像 f と行列 A の対応の意味である．

---

†) これらの式では (ξ_i) は $(n, 1)$-型，(b_i) は $(1, m)$-型の行列のようにみなす．そうすれば行列の積の結合法則から，$((b_i)A)(\xi_i) = (b_i)(A(\xi_i))$．従ってカッコを省略して $(b_i)A(\xi_i)$ とかいて差しつかえない．

(上に述べた式の変形は全く形式的なものであったが，それが実際正しいことは容易に確かめられるであろう．)

特に $V=W$ のときには，当然 $(a_i)=(b_i)$ とすることができる．このとき A は正方行列になり，(3′) は

$$(3'') \qquad f((a_i))=(a_i)A$$

の形になる．これが底 (a_i) に関して一次変換 f と行列 A の対応を与える式である．

3. 双一次形式（双一次写像）と行列

一般に“双一次形式”とは次のような多項式である．二組の変数 $Y_1,\cdots,Y_m$；$X_1,\cdots,X_n$ の多項式

$$B(Y_1,\cdots,Y_m;X_1,\cdots,X_n) \qquad (\text{または略して } B((Y_i),(X_i)))$$

で，$Y_1,\cdots,Y_m$ を固定したき（つまり定数とみなしたとき）$X_1,\cdots,X_n$ に関する斉一次式であり，$X_1,\cdots,X_n$ を固定したときには $Y_1,\cdots,Y_m$ に関する斉一次式であるようなものをこれらの変数に関する双一次形式という．そのような多項式は明らかに

$$(5) \qquad B((Y_i),(X_i))=\sum_{i,j=1}^{m,n}\beta_{ij}Y_iX_j$$

の形にかき表わされる．ここに β_{ij} は定数（スカラー）で和の記号は添数 i, j がそれぞれ1から m まで，1から n まで動くことを表わす．ここに B の係数として再び mn 個の数の組，すなわち (m,n)-行列，(β_{ij}) が現われる．これを双一次形式 B の（係数）行列といい，記号を節約するため同じ文字 B で表わすことにしよう．

さて多項式 B を関数と考えれば，それは $(n+m)$ 個の数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$；$\beta_1,\cdots,\beta_m$ に対して一つの数 $B((\beta_i),(\alpha_i))$ を対応させる関数である．そこで前にしたように n,m 次元ベクトル空間 V,W をとり，それぞれの底 $(a_i),(b_i)$ を固定しておく．そうすれば n 個の数の組 (α_i)（それを縦ベクトルと考える）を与えることは，それを成分ベクトルとする V の元 $a=(a_i)(\alpha_i)$ を与えることと同値であり，同様に m 個の数の組 (β_i) は W の一つの元 b

$=(b_i)(\beta_i)$ を定める．従って

$$F(b, a)=B((\beta_i), (\alpha_i)) \tag{6}$$

とおくことにより二変数（変ベクトル）b, a の関数 F，あるいは同じことだが“積空間” $W\times V$（すなわち $b\in W$ と $a\in V$ の組 (b, a) 全体の集合）の上の関数 F を定義することができる．(6) から特に

$$F(b_i, a_j)=\beta_{ij},$$

従って行列 B を

$$B=(F(b_i, a_j)) \tag{7}$$

とかくことができる．

$W\times V$ 上の関数 F に関して，その定義から明らかなように

$$F(y, x+x')=F(y, x)+F(y, x'), \tag{8.1}$$

$$F(y, \alpha x)=\alpha F(y, x), \tag{8.2}$$

$$F(y+y', x)=F(y, x)+F(y', x), \tag{8.3}$$

$$F(\alpha y, x)=\alpha F(y, x) \tag{8.4}$$

$$(y, y'\in W,\ x, x'\in V,\ \alpha\in K)$$

が成立する．(8.1), (8.2) は $F(y, x)$ が y を固定したとき x について線形であること，(8.3), (8.4) は $F(y, x)$ が x を固定したとき y について線形であることを示す．このような関数（または写像）を一般に“双一次関数”（または双一次写像）という．これで（底 $(a_i), (b_i)$ を定めたとき）$W\times V$ 上の双一次関数とはじめに述べた意味の双一次形式，従って (m, n)-行列 $B=(\beta_{ij})$ とが1対1に対応することが了解されたと思う．

特に $V=W$, $(a_i)=(b_i)$ のとき，双一次関数 F が“対称”，すなわち

$$F(y, x)=F(x, y) \tag{9}$$

であるためには，対応する行列 B が対称，すなわち，${}^tB=B$（${}^tB$ は B の転置行列）となることが必要十分である．この条件が成立するとき，B に“二次形式”

$$B((X_i),\ (X_i))=\sum_{i,j=1}^{n}\beta_{ij}X_iX_j \tag{10}$$

を対応させることができる．そして この対応も 1 対 1 である．[ただし ここでは簡明のため K を実数体または複素数体としておく．一般の場合については別の機会（「雑談」V）にまた説明することにしよう.]

4. 底の変換

最後に底の変換の行列について復習しよう．V を n 次元ベクトル空間，$(a_i), (a_i')$ をその二つの底とする．V の任意の元は a_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ の一次結合として一意的にかけるから，特に a_j' を

$$a_j' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} a_i \tag{11}$$

とかくことができる．このようにして n 次の正方行列 $L = (\lambda_{ij})$ が得られる．これを“底の変換” $(a_i) \to (a_i')$ の行列という．

L はまた底 (a_i) を (a_i') に移すような V の一次変換の底 (a_i) に関する行列と解釈することもできる．すなわち V の任意の元 x の成分ベクトルを (ξ_i) とするとき

$$f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i'$$

とおくことにより V をそれ自身の中にうつす一つの写像 f が定義される．f が線形であること，また $f(a_i) = a_i'$ であることは直ちにわかる．またこの二つの性質をもつ写像 f が 上に定義したものしかないことも 明らかであろう．そこで $f(a_j) = a_j'$, $b_i = a_i$ として (3) と (11) とを較べてみれば，L がちょうど一次変換 f の底 (a_i) に関する行列に なっていることがわかる．

さて (a_i'') を V の第三の底とし，底の変換 $(a_i') \to (a_i'')$ の行列を $L' = (\lambda_{ij}')$ とすれば，記号的に

$$(a_i') = (a_i)L, \qquad (a_i'') = (a_i')L'.$$

$$\therefore \quad (a_i'') = ((a_i)L)L' = (a_i)(LL').$$

よって底の変換 $(a_i) \to (a_i'')$ の行列は LL' になる．これから特に $(a_i'') = (a_i)$ の場合には

$$LL' = 1_n \qquad (n\text{ 次の単位行列}).$$

従って L が"正則"（可逆）で $L^{-1} = L'$ となることがわかる．

前置きが長くなってしまったが，これからがいよいよ本論である．（まあお茶でも飲みながらゆっくり聞いてくれたまえ．）

前と同様，V, W を n, m 次元のベクトル空間，$(a_i), (a_i')$ を V の二つの底，$(b_i), (b_i')$ を W の二つの底とし，底の変換 $(a_i)\to(a_i')$, $(b_i)\to(b_i')$ の行列をそれぞれ L, M とする．従って L, M はそれぞれ n, m 次の正則な正方行列である．この関係を記号的に

(12) $$(a_i') = (a_i)L, \qquad (b_i') = (b_i)M$$

とかいておく．

さて一次写像 $f: V \longrightarrow W$ が与えられたとき，底 $(a_i), (b_i)$ に関して f に対応する (m, n)-行列を A とすれば，記号的に

(13) $$f((a_i)) = (b_i)A.$$

同様に底 $(a_i'), (b_i')$ に関して同じ一次写像 f に対応する行列を A' とすれば

(13′) $$f((a_i')) = (b_i')A'.$$

これに (12) を代入すれば

$$f((a_i)L) = (b_i)MA'.$$

f が線形であることおよび (13) により左辺は

$$f((a_i))L = (b_i)AL$$

に等しい．よって表現の一意性から $MA' = AL$，あるいは

(14) $$A' = M^{-1}AL.$$

（ここでも形式的に計算したが，それが正しいことは容易に確かめられる．）

これが**一次写像の行列の変換則**である．

次に F を $W \times V$ 上の双一次関数とし底 $(a_i), (b_i)$ に関するその行列を B，また底 $(a_i'), (b_i')$ に関するその行列を B' とする．$L = (\lambda_{ij})$, $M = (\mu_{ij})$ とすれば

$$B' = (F(b_i', a_j')) = \left(F\left(\sum_{k=1}^{m} \mu_{ki} b_k, \quad \sum_{l=1}^{n} \lambda_{lj} a_l\right)\right)$$

$$= \left(\sum_{k,l} \mu_{ki} \lambda_{lj} F(b_k, a_l) \right)$$

$$= {}^t MBL.$$

よって

(15)　$$B' = {}^t MBL.$$

これが**双一次関数の行列の変換則**である．これと (14) とを較べてみれば M^{-1} のところが ${}^tM$ でおきかえられていることがわかる．従ってもし ${}^tM = M^{-1}$，すなわち M が直交行列ならば，この二つの変換則は全く同じものになってしまう．

(15) はまた双一次形式 $B((Y_i), (X_i))$ に変数の正則一次変換：

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} X_j' \qquad (\text{略して} \quad (X_i) = L \cdot (X_i')),$$

$$Y_i = \sum_{j=1}^{m} \mu_{ij} Y_j' \qquad (\text{略して} \quad (Y_i) = M \cdot (Y_i'))$$

を行って得られる双一次形式

$$B'((Y_i'), (X_i')) = B(M(Y_i'), L(X_i'))$$

の係数行列を与える公式と考えることもできる．

さて特に $V = W$, $(a_i) = (b_i)$, $(a_i') = (b_i')$ とすれば $L = M$，従って (14), (15) はそれぞれ

(16)　$$A' = L^{-1} AL,$$

(17)　$$B' = {}^t LBL$$

の形になる．(16) は一次変換（V から V 自身の中への一次写像）の（$(a_i) = (b_i)$ とした場合の）行列の変換則，また (17) は $m = n$ の場合 双一次形式の二組の変数に同じ正則一次変換を行ったときの係数行列の変換則を与える．従って特に二次形式の係数行列の変換則も (17) で与えられる．

5. 行列の標準形

最後に今まで述べた色々の変換に関する行列の標準形について説明しておこう．話を簡単にするために $m = n$ の場合だけを考える．二つの n 次正

方行列 A, A' に対し，正則な n 次正方行列 L, M があって (14) が成立するとき，仮に $A \approx A'$ とかくことにしよう．同様に (15), (16), (17) が成立するとき，それぞれ

$$B \precapprox B', \quad A \sim A', \quad B \simeq B'$$

とかくことにしよう．容易にわかる通りこれらはいずれも“同値関係”であり，従ってこれらの関係によって n 次の正方行列全体の集合が“同値類”に分割される[†]．行列 A の“標準形”を求める問題は A の属する同値類の中からなるべく簡単な形をした“代表”を見出すことに他ならない．

さて上記四つの同値関係を較べれば明らかに

$$\begin{array}{ccc} A \sim A' & \Longrightarrow & A \approx A' \\ & & \Updownarrow \\ A \simeq A' & \Longrightarrow & A \precapprox A' \end{array} \tag{18}$$

という関係がある．従って同値類に関していえば $\approx$ に関する類別が一番粗いということになる．事実，講義できかれたことと思うが

$$A \approx A' \Longleftrightarrow \operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A'.$$

従って $\operatorname{rank} A = r$ ならば

$$A \approx \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

この右辺が $\approx$ に関する A の標準形である．このことを双一次形式に関していえば，任意の双一次形式 $B((Y_i), (X_i))$ は変数の適当な正則一次変換によって標準形

$$\sum_{i=1}^{r} X_i' Y_i' \qquad (r = \operatorname{rank} B)$$

に変形されることを意味する．

スカラーを複素数（あるいは一般にある代数的閉体の元）とするとき，$\sim$ に関する標準形はいわゆる“ジョルダンの標準形”によって与えられる．

---

†) 読者は“同値関係”，“同値類” 等の術語にはおなじみのことと思う．例えば「数学セミナー」1973 年 10 月号，広瀬健「集合と同値関係」参照．

スカラーを実数とし，さらに B を対称行列としたとき

$$(20)\qquad B \simeq \begin{pmatrix} 1_p & & 0 \\ & -1_q & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},$$

しかもこの (p, q) は B によって一意的に定まる．これが有名な **Sylvester の慣性律**である．従ってこの場合 (20) の右辺が $\simeq$ に関する B の標準形である．さらに B が直交行列によって対角化できることから，実の対称行列の範囲では

$$(21)\qquad B \sim B' \Longrightarrow B \simeq B'$$

が成立することがわかる．

対称行列の標準形を実数体以外のときに考えること等，興味のある問題はまだ色々あるが，今日はもう大分おそくなってしまったからこの辺できり上げることにして，簡単な練習問題を出しておこう．

問 1.　3次の実対称行列全体の集合を同値関係 $\approx$ および $\simeq$ に関して類別すると，それぞれいくつの同値類に分割されるか？

問 2.　(21) の関係を証明せよ．

問 3.　$(a_i), (a_i'), (a_i'')$ をベクトル空間 V の三つの底とし，L, M をそれぞれ底の変換 $(a_i)\to(a_i')$, $(a_i')\to(a_i'')$ の行列とする．一方，f, g をそれぞれ $f(a_i)=a_i'$, $g(a_i')=a_i''$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ によって定まる V の（正則）一次変換とする．そのとき明らかに $(g\circ f)(a_i)=g(f(a_i))=a_i''$．しかし底 (a_i) に関して $g\circ f$ に対応する行列は ML でなく LM になる．その理由を考えよ．

II

写像空間，特に双対空間

1. 夢の夢は？

B「今日は，おやまたお昼寝ですか？」

A（うす目を開けて）「いいや，ちょっとこの世の双対空間に行っていたのだ.」

B「へえー，夢の世界のことを“双対空間”ともいうのですか．それでその夢の世界では何か面白いことがありましたか？」

A「いや，双対空間もこの世と同じことだ，そして逆に双対空間の方からいえば，この世すなわち夢の世界だ.」

B「そうするとこの世は“夢の夢”ということになりますね．何だか歌の文句にありそうですね.」

A（起き上って）「Poe にも“Dream within a dream”という詩がある.」（本箱の方へ行こうとする.）

B「詩のお話はまた今度うかがうことにして，今日はこの前お話に出たテンソルの話をしていただけませんか．テンソルというのは何だかカッコ良さそうでしたから.」

A「うむ，まあしてもよいが，余りあっさりしてしまうと有難味がない．そうだ，今日はさしあたり“写像空間”の話でもしておこう．これはいわば間に合せのテンソル空間だ．それにさっきいった双対空間も写像空間の特別な場合と考えることができる．… 」

2. 一次写像の空間

例によって定義から始めることにしよう．K を一つの体，V, W を K 上のそれぞれ n 次元，m 次元のベクトル空間とする．この前は V から W の中への一次写像と (m, n)-型の行列との対応の話をしたが，今日はこのような写像の間に一種の“ベクトル演算”が定義できることを説明しよう．まず f, g を V から W の中への二つの一次写像とするとき，その写像としての和を

$$(1)\qquad (f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad (x \in V)$$

によって定義する．すなわち，V の元 x に $f(x)+g(x)$ を対応させる写像を $f+g$ とかくのだ．そのとき $f+g$ がまた V から W の中への一次写像になることは容易に検すことができる．同様に f のスカラー倍を

$$(2)\qquad (\alpha f)(x) = \alpha\cdot f(x) \qquad (\alpha \in K,\ x \in V)$$

によって定義すれば，αf もまた V から W の中への一次写像になる．

そこで V から W の中への一次写像全体の集合を考え，それを $\mathrm{Hom}(V, W)$ とかくことにしよう．Hom は Homomorphism（準同型）の略である．抽象代数では一般に一つの代数系（群，体，ベクトル空間のように一つまたは二つ以上の代数演算が定義されている集合）から同種の代数系への写像でその演算を保つものを“準同型”という．ベクトル空間の準同型すなわち一次写像だから上記のような記号を使うのである．そうすれば上に述べたことは $\mathrm{Hom}(V, W)$ にベクトルの演算

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathrm{Hom}(V, W) \ni f, g \longmapsto f+g \in \mathrm{Hom}(V, W), \\ K \ni \alpha,\ \mathrm{Hom}(V, W) \ni f \longmapsto \alpha f \in \mathrm{Hom}(V, W) \end{cases}$$

が自然に定義されるということである．ここでこの演算が実際にベクトル演算の公理をみたすことも容易に確かめられる．（これはまた行列との対応を使っても証明される．）

従って $\mathrm{Hom}(V, W)$ は上記のベクトル演算に関して一つのベクトル空間になる．

読者の中には，このように一次写像の“集合”を考え，さらにそれをベク

トル空間とみなすことに抵抗を感じる方もあるかと思う．ベクトルとは一つの矢印という見地からすれば，それはもっともなことである．しかし個々のベクトルではなく，その集合であるベクトル空間に着目することが線形代数の第一指導原理なのであり，またどんな集合であれベクトル空間の公理さえみたせば，それは立派なベクトル空間なのである．従って線形代数を学ぶためには，まず“ベクトルは矢印”というような固定観念を捨て去ることが大切である．さらに蛇足を加えるならば，集合の概念はこのような数学的対象に適用してこそ効力を発するのであって，リンゴの集合やバナナの集合を考える段階に止まるならば，それは子供の（あるいは大人の）遊戯以上の何ものでもない．

さて，V, W にそれぞれ底 $(a_i), (b_i)$ を固定し，一次写像 $f\colon V \longrightarrow W$ に (m, n)-行列 $A=(\alpha_{ij})$ が対応するとき，$f \longleftrightarrow A$ とかくことにしよう．そうすれば容易にわかるように

$$f \longleftrightarrow A, \qquad g \longleftrightarrow B$$

ならば

$$f+g \longleftrightarrow A+B, \qquad \alpha f \longleftrightarrow \alpha A.$$

ここで $A+B, \alpha A$ は行列としての和およびスカラー倍を表わす．例えば，$A=(\alpha_{ij})$, $B=(\beta_{ij})$ のとき，$A+B=(\alpha_{ij}+\beta_{ij})$．そこで（$K$ に成分をもつ）(m, n)-行列全体の集合を $M_{m,n}(K)$ とかくことにしよう．$M_{m,n}(K)$ は行列のベクトル演算に関してベクトル空間になる．上に述べたことは Hom (V, W) と $M_{m,n}(K)$ の間の1対1対応 $f \longleftrightarrow A$ がベクトル演算を保つこと，いい換えれば写像 $f \longmapsto A$ もその逆写像 $A \longmapsto f$ も共に準同型であることを意味する．このようなとき，二つのベクトル空間 $\mathrm{Hom}(V, W)$ と $M_{m,n}(K)$ は“同型”であるといい

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong M_{m,n}(K) \tag{4}$$

とかく．明らかに $\dim M_{m,n}(K)=mn$ であるから，(4) から

$$\dim \mathrm{Hom}(V, W) = mn \tag{5}$$

を得る．

ここで特に $W=K$，すなわち K 自身を K 上の1次元ベクトル空間とみなしたもの，とすれば (4),(5) から

$$\mathrm{Hom}(V,K)\cong M_{1,n}(K),\qquad \dim \mathrm{Hom}(V,K)=n$$

を得る．$V^*=\mathrm{Hom}(V,K)$ とおき，これを V の**双対空間**と呼ぶ．上記により V^* もまた n 次元のベクトル空間であり，V の底 (a_i) および K の底 (1) を固定するとき，V^* の元は $(1,n)$-行列，すなわち n 次元の横ベクトルによって表わされる．

（この節では“容易に”という言葉を何回か使った．数学では余り容易でなくても“容易に”といってゴマカシてしまうことがあるが，この節に関する限り実際“容易に”証明できる．読者の練習に委ねることにしよう．）

3. 一つの同型定理

次に積空間 $W\times V$ から K の中への双一次関数（写像）全体の集合を考えよう．前と同様，双一次関数の間に関数（写像）としての和およびスカラー倍を定義することができ，このベクトル演算に関して，$W\times V$ から K の中への双一次写像全体の集合は一つのベクトル空間になる．これを $\mathrm{Hom}(W\times V,K)$ で表わすことにする．前回に説明した双一次写像と行列との対応により，前と同様

(6)　$$\mathrm{Hom}(W\times V,K)\cong M_{m,n}(K)$$

が成立し，従って

(7)　$$\dim \mathrm{Hom}(W\times V,K)=mn$$

である．(“同様に”という言葉も一つのゴマカシ用語である．しかし反復をさけることは理論構造を明らかにする上に役立つであろう．)

$\mathrm{Hom}(V,W)$ と $\mathrm{Hom}(W\times V,K)$ は共に mn 次元のベクトル空間であるから勿論互いに同型である．しかし同型 (4),(6) は底の取り方に依存し，これらの同型を通じて $\mathrm{Hom}(V,W)$, $\mathrm{Hom}(W\times V,K)$ の元を表わす行列の変換則が相異なることから推察されるように，この二つの空間の間に“標準的”(canonical) な同型対応を見出すことは一般にはできない．しかし次の

ような標準的同型は存在する：

(8) $$\mathrm{Hom}(V, W^*) \cong \mathrm{Hom}(W\times V, K).$$

上記変換則の相違が W と W^* の相違の中に吸収されるのである．

(8) の証明の筋道だけを述べよう．（細部の検証は読者の演習としよう．）

$a\in V$, $F\in \mathrm{Hom}(W\times V, K)$ とする．写像

$$W\ni y \longmapsto F(y,a)\in K$$

は W から K の中への一次写像，すなわち W^* の元になるから，それを F_a とかくことにしよう．すなわち

(9) $$F(y,a) = F_a(y).$$

そのとき写像：$a\longmapsto F_a$ は V から W^* の中への一次写像になるから，それを f とかくことにしよう．すなわち

(10) $$f(a) = F_a.$$

そのとき 写像： $F\longmapsto f$ は $\mathrm{Hom}(W\times V, K)$ から $\mathrm{Hom}(V, W^*)$ の中への一次写像になる．さらに この写像の“核”が $\{0\}$ であること（すなわち $f=0 \Longrightarrow F=0$）は容易に確かめられる．（実際，$f=0$ とすれば，すべての a に対し $F_a=f(a)=0$，従ってすべての a と y に対し $F(y,a)=F_a(y)=0$．すなわち $F=0$.）従ってこの写像は 1 対 1 の写像である．

$$\dim \mathrm{Hom}(W\times V, K) = \dim \mathrm{Hom}(V, W^*) = mn$$

であるから，一次写像に関するよく知られた定理[†]により写像 $F\longmapsto f$ はまた“上へ”の写像になる．従ってそれは (8) の同型を与える．（証終）

ここで大切なことはこの同型（すなわち (9),(10) によって定義される対応 $F\longmapsto f$）が V, W の底の取り方に関係なく自然に定義されたということである．このような同型を“標準的”というのである．

（**B**「エレガントな同型というわけですか？」 **A**「いや，それとは少し違う．カノニカルというのはもっと本質的な概念だ．」）

上の証明は底を取らずにすることができたが，実用上はやはり底を取って対応する行列を比較してみる方が得策である．$(a_i),(b_i)$ をそれぞれ V, W

---

†) 「線型代数学」p. 104，系 1.

の底とする．$W^* = \mathrm{Hom}(W, K)$ の底としては，(b_i) に関する同型

$$W^* \cong M_{1,n}(K)$$

によって，n 次元横ベクトル空間の標準的底

$$((1, 0, \cdots, 0),\ (0, 1, 0, \cdots, 0),\ \cdots,\ (0, \cdots, 0, 1))$$

に対応する W^* の底 (g_i) をえらぶ．換言すれば，(g_i) は

$$(11) \qquad g_i(b_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

によって特徴づけられる W^* の底である．これを (b_i) の**双対底**という．

さて同型 (8) によって $f \longleftrightarrow F$ であるとし，底 $(a_i), (g_i)$ に関する f の行列を $A = (\alpha_{ij})$，底 $(a_i), (b_i)$ に関する F の行列を $B = (\beta_{ij})$ とする．定義により

$$f(a_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} g_i,$$

$$F(b_i, a_j) = \beta_{ij}.$$

(9), (10) により

$$\begin{aligned} F(b_i, a_j) &= F_{a_j}(b_i) = (f(a_j))(b_i) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} g_k\right)(b_i) \\ &= \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kj} g_k(b_i). \end{aligned}$$

よって (11) により，$F(b_i, a_j) = \alpha_{ij}$，従って $A = (\alpha_{ij}) = (\beta_{ij}) = B$ である．すなわち，上記のように V, W, W^* の底をえらぶとき，標準的対応 $f \longleftrightarrow F$ とは単に同じ行列に対応する f と F を対応させることに他ならない．

特に f が同型対応（V から W^* の上への 1 対 1 の一次写像）になるためには，よく知られているように $m = n$ で行列 A が "正則"，つまり $\det(A) \neq 0$ なることが必要十分である．従ってそれに対応する F の行列 $B\ (= A)$ も正則である．このような双一次関数（または双一次形式）F を "非退化" (nondegenerate) という．標準的同型 (8) により，V から W^*

への同型写像 f と $W\times V$ 上の非退化双一次関数 F とが対応している．従って，$W\times V$ 上に非退化双一次関数 F が与えられたとき，それに対応する同型 f によって V を W の双対空間 W^* と一致させることができる．これが標準的同型 (8) のもつ一つの重要な意味である．

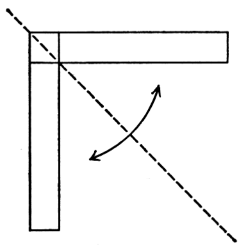
4. ベクトル空間の双対性

一つのベクトル空間 V にその双対空間 V^* を対応させる操作を二度くり返すと何が得られるだろうか？　それは勿論 V^{**} であるが，実は標準的同型

$$V^{**}\cong V \tag{12}$$

が在存するのである．従って $V^{**}=V$ と考えることができる．これをベクトル空間の双対性 (duality) という．

(双対空間をとる操作は縦ベクトルの空間を横ベクトルの空間でおきかえること，いわばタテのものをヨコにすることであり，そのときヨコのものは自然にタテになる．従って $V^{**}=V$!　しかしこれでは残念ながら証明とはいえない．)



ここでも V と V^{**} は共に n 次元のベクトル空間であるから，それらが互いに同型であることは自明である．大切なことはその同型対応の中に一つ特別なもの，いわば一人のエリートが存在することなのである．

ここではその存在を前節に述べた標準的同型 (8) から導くことにしよう．まず準備として一次写像の“共役”(adjoint) の定義を与えよう．標準的同型 (8) により $f\longleftrightarrow F$ であるとする．F に対しその二つの変数を入れ換

えて得られる双一次関数を θF とかく．すなわち

$$(\theta F)(x, y) = F(y, x) \qquad (x \in V,\ y \in W). \tag{13}$$

明らかに $\theta F \in \mathrm{Hom}(V \times W, K)$，また対応 $F \longmapsto \theta F$ は $\mathrm{Hom}(W \times V, K)$ から $\mathrm{Hom}(V \times W, K)$ の上への（標準的）同型である．一方 (8) において V と W とを入れ換えれば，標準的同型

$$\mathrm{Hom}(W, V^*) \cong \mathrm{Hom}(V \times W, K) \tag{8*}$$

が得られる．この同型で θF に対応する $\mathrm{Hom}(W, V^*)$ の元を ${}^t f$ とかき，f の**共役**または**双対写像**という．前に述べたように V, V^*, W, W^* の底をとり，$f, {}^t f, F, \theta F$ に対応する行列を考えよう．

$$F \longleftrightarrow A = (\alpha_{ij})$$

とすれば，明らかに

$$\theta F \longleftrightarrow {}^t A = (\alpha_{ji}) \qquad (\text{転置行列})$$

である．従って前節に述べたことから

$$f \longleftrightarrow A \Longrightarrow {}^t f \longleftrightarrow {}^t A$$

である．

さてここで $W = V^*$ としてみよう．今まで述べたことから次の四つの同型（いずれも標準的）が得られる：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}(V, V^{**}) & \underset{(8)}{\cong} & \mathrm{Hom}(V^* \times V, K) \\
(f \longmapsto {}^t f)\ \big\downarrow\ \wr\| & & \wr\|\ \big\downarrow\ (F \longmapsto \theta F) \\
\mathrm{Hom}(V^*, V^*) & \underset{(8^*)}{\cong} & \mathrm{Hom}(V \times V^*, K)
\end{array}$$

$\mathrm{Hom}(V^*, V^*)$ は V^* の一次変換全体の作るベクトル空間であるから，その中には特に V^* の恒等変換 1_{V^*} が含まれている．従って ${}^t f_0 = 1_{V^*}$ となるような $\mathrm{Hom}(V, V^{**})$ の特定の元 f_0 が存在する．（これがわれわれの探していたエリートである．）1_{V^*} は n 次の単位行列に対応し，従って，f_0 も同じ行列に対応する．このことから特に一次写像

$$f_0 : V \longrightarrow V^{**}$$

が同型対応であることがわかる．これで標準的同型 (12) の存在が証明され

た．定義に戻って考えれば，$x \in V$ に対し $f_0(x) = \phi_x$ は

$$\phi_x(g) = g(x) \qquad (g \in V^*) \tag{14}$$

によって定まる V^{**} の元であることがわかる．

$V^{**} = V$ という関係は V 自身を V^* の双対空間（すなわち“夢の夢”）とみなし得ることを意味する．従って今仮にベクトル空間というもの全体の集合（そういうものを考えることは実際には不可能なのだが）を考えるとその中でベクトル空間は V と V^* というように二つずつ組になっているわけである．同じような双対性は有限アーベル群，局所コンパクトな位相アーベル群等に対しても成立し，現代数学において極めて重要な役割を果している．

なお，ベクトル空間の双対性に関しては，V と V^* の部分空間の対応，双対写像の性質，等々を説明しなければなるまいが，それは大抵の教科書に出ていることでもあり，「雑談」の立場からは省略させていただくことにする†)．

問 1. S を一つの集合，W を K 上のベクトル空間とする．S から W の中への写像全体の集合（それを W^S で表わす）も **2** に述べた写像のベクトル演算に関して一つのベクトル空間になる．特に S が n 個の元からなる有限集合，$\dim W = m$ のとき，$\dim W^S = mn$ であることを示せ．

問 2. $V = W$ とし，標準的同型 (8) によって $f \longleftrightarrow F$ であるとする．V の一次変換 φ が F に関して“自己共役”，すなわち

$$F(\varphi(x), y) = F(x, \varphi(y)) \qquad (x, y \in V)$$

であるためには，$f \circ \varphi = {}^t\varphi \circ f$ が必要十分であることを示せ．

問 3. $\mathrm{Hom}(V, W)$ と $\mathrm{Hom}(W, V)$ とは互いに双対的，すなわち標準的同型

$$\mathrm{Hom}(V, W)^* \cong \mathrm{Hom}(W, V)$$

が存在することを証明せよ．

---

†) 「線型代数学」V，§1．参照．

III

テンソルの概念

1. マトリックスからテンソルへ

B君のリクエストに答えて今日はテンソルの話をしてみよう．といっても，ごく基本的なテンソル積やテンソル空間の概念を説明するだけのことである．

まず第一回のときにお話した一次変換の行列の変換式

(1) $$A' = L^{-1}AL$$

を想い出していただこう．記号を復習すれば，V を n 次元ベクトル空間，f をその一次変換（V を V 自身の中にうつす一次写像），$(a_i), (a_i')$ を V の二つの底とし，底の変換 $(a_i)\rightarrow(a_i')$ の行列を L，またそれぞれ底 (a_i)，(a_i') に関して f を表わす行列を A, A' とするのである．すなわち L, A, A' はそれぞれ関係式

$$(a_i') = (a_i)L, \quad f((a_i)) = (a_i)A, \quad f((a_i')) = (a_i')A'$$

によって定まる n 次の正方行列である．

さて以前と少し記法をかえて，行列 A, A', L, L^{-1} の (i, j)-成分を $\alpha_j{}^i$, $\alpha'_j{}^i, \lambda_j{}^i, \mu_j{}^i$ とかくことにしよう．すなわち

(2) $$A = (\alpha_j{}^i), \quad A' = (\alpha'_j{}^i), \quad L = (\lambda_j{}^i), \quad L^{-1} = (\mu_j{}^i).$$

そうすれば (1) は

$$\alpha'_j{}^i = \sum_{k, l=1}^{n} \mu_k{}^i \alpha_l{}^k \lambda_j{}^l$$

を意味する．ここで更に i, j, k, l を j_2, j_1, i_2, i_1 とかき直せば

(3) $$\alpha'_{j_1}{}^{j_2} = \sum_{i_1, i_2=1}^{n} \lambda_{j_1}{}^{i_1} \mu_{i_2}{}^{j_2} \alpha_{i_1}{}^{i_2}$$

となる．

同様に双一次関数を表わす行列の変換則

$$B' = {}^tLBL \tag{4}$$

において，$B=(\beta_{ij})$, $B'=(\beta'_{ij})$ とおけば

$$\beta'_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \lambda_i{}^k \beta_{kl} \lambda_j{}^l,$$

あるいはかき直して

$$\beta'_{j_1 j_2} = \sum_{i_1, i_2=1}^{n} \lambda_{j_1}{}^{i_1} \lambda_{j_2}{}^{i_2} \beta_{i_1 i_2} \tag{5}$$

を得る．(新しい記法によれば加えられる添数 i_1, i_2 が必ず上下に現われるところがミソである.)

そこでこれらの変換則の一般化として

$$\alpha'_{j_1 \cdots j_r}{}^{j_{r+1} \cdots j_{r+s}} = \sum_{i_1, \cdots, i_{r+s}=1}^{n} \lambda_{j_1}{}^{i_1} \cdots \lambda_{j_r}{}^{i_r} \mu_{i_{r+1}}{}^{j_{r+1}} \cdots \mu_{i_{r+s}}{}^{j_{r+s}} \alpha_{i_1 \cdots i_r}{}^{i_{r+1} \cdots i_{r+s}} \tag{6}$$

の形の変換式を考えることができる．一般に（V に附随した）$\boldsymbol{r}$ **回共変** $\boldsymbol{s}$ **回反変テンソル**，あるいは略して $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$ **テンソル**というのは，底の変換 $(a_i)\to(a_i')$ に対して変換則 (6) をみたすような n^{r+s} 個の "成分" $(\alpha_{i_1 \cdots i_r}{}^{i_{r+1} \cdots i_{r+s}})$ によって定まる 数学的量 のことである． 従って 例えば， V の 一次変換は $(1,1)$ テンソル， また $V\times V$ 上の 双一次関数は $(2,0)$ テンソル であるということができる．

更にベクトル空間 V の元 a の（底 (a_i) に関する）"成分" を (α^i)，すなわち

$$a = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i a_i$$

とすれば，底の変換 $(a_i)\to(a_i')$ に対して

$$\alpha'^j = \sum_{i=1}^{n} \mu_i{}^j \alpha^i \tag{7}$$

が成立する．従って，(α^i) は $(0,1)$ テンソルの成分，すなわち a は $(0,1)$ テンソルである． この意味で V の元を "反変ベクトル" ということもある．(後に説明するように "共変ベクトル" すなわち $(1,0)$ テンソルは双対空間 V^* の元によって与えられる.)

テンソルの和やスカラー倍は成分を使って簡単に定義できる．t, t' をそれぞれ成分 $(\alpha_{i_1\cdots}), (\beta_{i_1\cdots})$ をもつ同種のテンソルとすれば，$(\alpha_{i_1\cdots}+\beta_{i_1\cdots})$ も同じ変換則をみたすから，また一つのテンソルを定める．それを $t+t'$ と定義する．このようにして (r, s) テンソル全体の集合は n^{r+s} 次元のベクトル空間になる．…

2. テンソルの実体は？

B「おじさん，ちょと待って下さい．成分がコレコレシカジカの変換則をみたす数学的量といっても，本当にそんな量があるのですか？ (2,0) テンソルや (1,1) テンソルのときには，具体的に双一次関数とか一次変換とかがあったからはっきりしていますが，一般の場合のテンソルは何だか成分だけあって実体のないオバケのようで不安な気がします.」(真剣な表情)

A「今に微分幾何や物理をやればいやでもそういう量に沢山お目にかかるようになるよ．それに一般の場合，テンソルが存在することは数学的にもちゃんと証明されているんだ.」

B「それでは一体テンソルはどこにあるのですか？」(机の下をのぞきこむ.)

A「おいおい，犬や猫じゃあるまいし，テンソルはそんな所にかくれていやしないよ.」

B「それじゃ一体 … 」

A「まあ待て．数学的に"存在"が証明されてしまえば，それはもう確かに存在する．しかしそれはあくまでも一つの概念としてわれわれの頭の中にあるだけのことで，それを目で見たり，手で掴まえたりするわけにはいかんのだ．早い話が 1 という数の概念にしてもわれわれの思考が生みだした一つの抽象的な概念で … 」

B「でもおじさん，(勢よく) あそこの時計にはちゃんと1という立派な文字がありますよ．あれは一体何でしょう.」

A「あんなものは1という概念を表わす一つの標識に過ぎない.」

B「そういうものですか.（やや落胆して）それではテンソルを目で見ることは一応あきらめます．そのかわりテンソルの存在を一つ証明してみせて下さい.」

A「それはお安い御用だ．それにはまずテンソル積を定義し，それを使ってテンソル空間を作ってしまうのが一番よいだろう．そうすれば君のいうテンソルの“実体”が得られたことにもなる.」

3. テンソル積

テンソル積の概念を説明するために，まず一次写像の性質について少し復習しよう．V, V' を（体 K の上の）二つのベクトル空間，$\dim V = n$ とし

$$f\colon V \longrightarrow V'$$

を V から V' の中への一次写像とする．そのとき f の像 $f(V)$ は V' の線形部分空間で，一般に

$$\dim f(V) \leqslant n.$$

ここで等号が成立するのは f が 1 対 1 写像である（すなわち $f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y$ が成立する）ときに限る．この最後の条件はまた“(a_i) が V の底ならば，n 個のベクトル $f(a_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ は一次独立”という条件と同値である．

上と類似のことを双一次写像の場合に考えてみよう． V, W, T を（K 上の）三つのベクトル空間，$\dim V = n$, $\dim W = m$ とし

$$F\colon V\times W \longrightarrow T$$

を一つの双一次写像とする．すなわち，$F(x, y)$ $(x \in V,\ y \in W)$ は y を固定したときには x について線形，また x を固定したときは y について線形であると仮定する．そのとき F の“像”

$$F(V\times W) = \{\, F(x, y) \mid x \in V,\ y \in W \,\}$$

は T の部分集合ではあるが，一般には線形部分空間にならない（問 2 参照）．そこで $F(V\times W)$ によって“張られる”（生成される）T の部分空間，すなわち $F(x, y)$ $(x \in V, y \in W)$ の一次結合全体の作る部分空間を

$$(F(V\times W))_K$$

によって表わし，F の“像空間”ということにしよう．

さて $(a_i),(b_i)$ をそれぞれ V, W の底とすれば，F が双一次写像であることから，F の像空間は nm 個の元 $F(a_i, b_j)$ $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ によって張られる．従って

$$\dim(F(V\times W))_K\leqslant nm. \tag{8}$$

ここで等号が成立するためには上記の nm 個の元 $F(a_i, b_j)$ が一次独立であることが必要十分である．

そこで次のような条件を考える：

（i）$(F(V\times W))_K=T,$

（ii）$\dim T=nm.$

この条件は双一次写像 F の像空間の次元が最大になり，しかも T 全体になる（T にはそれ以上余分な所がない），いわば F は最も効率の良い双一次写像であることを意味する．(i),(ii) をみたす，T, F の組を V と W の**テンソル積**というのである．

テンソル積は果して存在するだろうか？　それを保証するのが次の基本定理である．

基本定理　1)　任意の（有限次元）ベクトル空間 V, W に対し，条件 (i), (ii) をみたす組 (T, F) は存在する．

2)　(T, F) が (i),(ii) をみたすとき，任意の双一次写像

$$F' : V\times W\longrightarrow T'$$

に対し，一次写像 $\rho : T\longrightarrow T'$ で

$$F'=\rho\circ F \tag{9}$$

[すなわち，任意の $x\in V,\ y\in W$ に対し，$F'(x, y)=\rho(F(x, y))$] となるものが一意的に存在する．

2) に述べた F の性質は少し理解し難いかもしれないが，F が“最も効率

が良い”ということの別の数学的表現で F の“普遍性”(universality) と呼ばれている.

便宜上，先に 2) を証明してしまおう．それは何でもない．上に述べたように $(a_i),(b_i)$ を V,W の底とすれば，条件 (i) は T が nm 個の元 $F(a_i, b_j)$ $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ によって生成されることを意味する．条件 (ii) によってそれらは更に一次独立，従って T の一つの底を与える．従って，別の双一次写像 F' が与えられたとき，一次写像 $\rho: T\longrightarrow T'$ を

$$\rho\Bigl(\sum_{i,j}\xi_{ij}F(a_i,b_j)\Bigr)=\sum_{i,j}\xi_{ij}F'(a_i,b_j)$$

によって定義してしまえば，明らかに (9) が成立する．しかも (9) をみたす ρ は自然に上式をみたすから，それは今定義した ρ に一致する，すなわちそのような ρ は唯一つしか存在しない.

F の普遍性からその“一意性”がでる．(まだ“存在”も証明しないのに，その一意性を云々するのはおかしいと思う人があるかもしれないが，“存在する”ということと，“存在するとすれば唯一つしかない”ということとは全く別のことである．従って独立に議論できるのである.)

今，$(T,F),(T',F')$ が両方とも (i),(ii) をみたすとすれば，まず F の普遍性から (9) をみたす一次写像

$$\rho:\ T\longrightarrow T'$$

が一意的に存在する．次に F' の普遍性から (F と F' の役割を交換して)，

(9′) $$F=\rho'\circ F'$$

をみたす一次写像

$$\rho':\ T'\longrightarrow T$$

の存在がでる．(9) と (9′) から

$$F=\rho'\circ\rho\circ F.$$

従って，F の像空間が T と一致することから

(10) $$\rho'\circ\rho=1_T \qquad (T\text{ の恒等変換})$$

を得る．同様にして

$$\rho\circ\rho' = 1_{T'} \quad (T' \text{ の恒等変換}). \tag{10'}$$

(10), (10′) から，ρ が T から T' の上への“同型写像”であり，$\rho'=\rho^{-1}$ (ρ の逆写像) であることがわかる．このように (T,F) は（同型を除いて）一意的に定まる．しかもその同型 ρ も一意的に定まるのだから，非常に強い意味で一意性が成り立つといわなければならない．

（**B**「一意的とおっしゃっても，現に (T,F) と (T',F') と二つあるじゃありませんか！」**A**「それは二つ時計を持ってくれば二つ文字盤があるようなものだ．テンソル積の表示は幾通りもできるが，数学的概念としては唯一つしかないということなのだ．」）

4. 基本定理の証明

基本定理の 1) の部分（テンソル積の存在）を証明しよう．証明は簡単だが方法上の興味から三通りの証明を与える．

証明 1. （底を使う方法）　V, W の底 $(a_i), (b_i)$ を定めておく．T を任意の nm 次元ベクトル空間とし，(e_k) $(1\leqslant k\leqslant nm)$ をその任意の底とする．e_k を適当に長方形に配列して e_{ij} $(1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant m)$ とかくことができる．例えば

$$e_{ij} = e_{i+n(j-1)}$$

とおけばよい．そこで写像 $F\colon V\times W\longrightarrow T$ を

$$F\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i a_i, \sum_{j=1}^{m}\eta_j b_j\right) = \sum_{i,j=1}^{n,m}\xi_i\eta_j e_{ij} \tag{11}$$

によって定義すれば，F は明らかに双一次的で，

$$F(a_i, b_j) = e_{ij}$$

であるから条件 (i) をみたす．条件 (ii) は T の定義からすでに自明である．（証終）

（この証明は本質的には“成分”によってテンソルを定義するのと同じ考え方に基づく．実際的ではあるが，テンソル積の“実体”が掴み難い．）

証明 2.（写像空間を使う方法）　前回に説明した写像空間の概念を利用する．V, W の“双対空間”を V^*, W^* とし

(12)
$$T = \mathrm{Hom}(V^* \times W^*, K)$$

とおく．すなわち，T は $V^* \times W^*$ 上の双一次関数全体の作るベクトル空間である．双一次関数と行列との対応を考えれば，明らかに $\dim T = nm$，すなわち条件 (ii) が成立する．そこで写像 F: $V \times W \longrightarrow T$ を次のように定義する．まず $x \in V$, $y \in W$, $f \in V^*$, $g \in W^*$ に対し

(13)
$$\varphi_{x,y}(f, g) = f(x)g(y)$$

とおく．すなわち対応

(14)
$$(f, g) \longmapsto f(x)g(y)$$

を考えると，それは（x, y によって定まる）$V^* \times W^*$ 上の一つの関数になるから，それを $\varphi_{x,y}$ とかくのである．対応 (14) は明らかに双一次的だから，$\varphi_{x,y} \in \mathrm{Hom}(V^* \times W^*, K)$．そこで

$$F(x, y) = \varphi_{x,y}$$

とおけば，$V \times W$ から T の中への写像が得られるが，これも“容易に”わかるように双一次的である．よって双一次写像 F が得られた．前と同様，$(a_i), (b_i)$ を V, W の底，$(f_i), (g_i)$ をそれと“双対的”な V^*, W^* の底とすれば

$$\varphi_{a_i, b_j}(f_k, g_l) = f_k(a_i) \cdot g_l(b_j)$$
$$= \delta_{ik}\delta_{jl}.$$

これは $V^* \times W^*$ 上の双一次関数 $F(a_i, b_j) = \varphi_{a_i, b_j}$ に対応する行列が (i, j)-成分だけ 1 で他は全部 0 であるような行列，いわゆる“行列単位”になることを示す．(n, m)-行列の全体はこのような行列単位によって張られるから，$\mathrm{Hom}(V^* \times W^*, K)$ も $\{\varphi_{a_i, b_j}\ (1 \leqslant i \leqslant n,\ 1 \leqslant j \leqslant m)\}$ によって張られる．これで F に対して条件 (i) が成立することが証明された．（証終）

（この証明の長所は (T, F) を底のとり方に関係なく，V, W から直接に定義してしまう所にある．このような定義あるいは証明を intrinsic という．

最後の所でちょっと底をとって議論したが，その辺はまあかんべんして頂くことにしよう.）

証明 3.（抽象代数的方法）　これは大分 "sophisticated" な方法だから，簡単に要領だけを説明しておく. V と W の積集合 $V\times W$（K が無限体ならそれは一般に無限集合である）によって生成される "自由" なベクトル空間（すなわち，$V\times W$ を底とするような無限次元ベクトル空間）$\tilde{T}$ を考える. $\tilde{T}$ の中で

$$\begin{cases} (x+x')\times y-x\times y-x'\times y, \\ (\alpha x)\times y-\alpha(x\times y), \\ x\times(y+y')-x\times y-x\times y', \\ x\times(\alpha y)-\alpha(x\times y) \end{cases}$$

$$(x, x'\in V,\ y, y'\in W,\ \alpha\in K)$$

のような形の元全体によって生成される部分空間を N とし

(15)　$$T=\tilde{T}/N \qquad \text{（商空間）}$$

とおく. そうすれば

(16)　$$F(x, y)=(x\times y \bmod N)\in T$$

によって定義される写像 $F: V\times W\longrightarrow T$ が双一次的で条件 (i) をみたすことは自明であるが，更に F が基本定理に述べた普遍性をもつことも（T, F）の構成から殆んど明らかである. そのことから，あるいは直接に，$\dim T=nm$ であることが証明される.（証終）

（この方法はより一般に "加群" の場合にもそのまま適用できる利点をもつ. しかし有限次元ベクトル空間の場合には証明の途中でその枠からはみだして無限次元空間を使うことになり，ニワトリを料理するのに牛刀を用いるような感じがする.）

証明 1 では（T, F）の選択に自由度が多いから，上に述べた一意性が非常に重要になる. いわば一意性によってはじめてその真の存在が保証されるの

である．これに反して第二，第三の方法ではテンソル積 (T, F) として特別なものを（いわばはじめから一意的に）構成してしまう．この場合，基本定理はそのテンソル積の性質 (i), (ii) による“特徴づけ”を与えるのである．

5. テンソル空間

テンソル積 (T, F) の存在と一意性が証明されたから慣習に従ってそれを

$$T = V \otimes W, \qquad F(x, y) = x \otimes y \qquad (x \in V,\ y \in W)$$

とかくことにする．上の証明 2 により標準的同型

$$V \otimes W \cong \mathrm{Hom}(V^* \times W^*, K) \qquad (x \otimes y \longleftrightarrow \varphi_{x,y}) \tag{17}$$

が成立する．これと前回に説明した標準的同型

$$\mathrm{Hom}(V^* \times W^*, K) \cong \mathrm{Hom}(W^*, V)$$

(II, (8) において V, W を W^*, V^* でおきかえたもの) とを組合せれば

$$V \otimes W \cong \mathrm{Hom}(W^*, V) \tag{18}$$

という関係も得られる．記号をかえて (18), (17) を

$$\mathrm{Hom}(V, W) \cong W \otimes V^*, \tag{18'}$$

$$\mathrm{Hom}(V \times W, K) \cong V^* \otimes W^* \tag{17'}$$

とかくこともできる．

以上は二個のベクトル空間のテンソル積であったが，三個以上の場合にも，二個の場合から帰納的に，あるいは上記の方法を直接拡張して，テンソル積の存在と普遍性が証明される．例えば (17) の拡張として

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \cong \mathrm{Hom}(V_1^* \times \cdots \times V_r^*, K) \tag{19}$$

が成立するはずだから，この式によって $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ を定義してしまうことができる（証明 2 の拡張）.

さて (18′), (17′) 等から類推されるように，(r, s) テンソルの空間を作るには

$$T^{(r,s)} = \overbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}^{r} \otimes \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^{s} \tag{20}$$

とおけばよい．互いに双対的な V, V^* の底 $(a_i), (f^i)$ をとれば，n^{r+s} 個の

元

$$f^{i_1}\otimes\cdots\otimes f^{i_r}\otimes a_{i_{r+1}}\otimes\cdots\otimes a_{i_{r+s}} \qquad (1 \leqslant i_1,\ \cdots,\ i_{r+s} \leqslant n)$$

が $T^{(r,s)}$ の一つの底を構成する．この底に関する $T^{(r,s)}$ の元 t の成分を $(\alpha_{i_1\cdots i_r}{}^{i_{r+1}\cdots i_{r+s}})$ で表わせば，それが最初に述べた変換則 (6) をみたすことは"容易に"わかる．従って (r,s) テンソルの空間は，$T^{(r,s)}$ によって与えられる．特に $T^{(1,0)}=V^*$，すなわち $(1,0)$ テンソル（共変ベクトル）の空間は V の双対空間 V^* によって与えられるのである．

問 1. $(a_i),(f^i)$ を V, V^* の互いに双対的な底とする．$f\in V^*$ について次の命題 (i), (ii) が同値であることを証明せよ．

(i) $f=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f^i$，すなわち (α_i) は f の (f^i) に関する成分である．

(ii) $f(a_i)=\alpha_i$，すなわち $(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ は一次写像 $f\colon V\longrightarrow K$ の，底 $(a_i),(1)$ に関する行列（$(1,n)$-型）である．

問 2. 同型 (18′) において $y\otimes f\in W\otimes V^*$ に対応する一次写像 $\varphi\colon V\longrightarrow W$ はどんなものか？　特に $y\neq 0, f\neq 0$ のとき $\mathrm{rank}\,\varphi=1$ であることを証明せよ．($y=0$ または $f=0$ なら当然 $\varphi=0$ である．)

このことから一般に $\dim V,\ \dim W\geqslant 2$ ならば，双一次写像 $F\colon V\times W\longrightarrow T$ の像は線形部分空間ではないことがわかる．

IV

標数 2 の線形代数

1. 標数 2 の世界

B 「おじさん．今日数学の時間に先生が不思議なことをおっしゃいましたよ．」

A 「どんなことだ？」

B 「対称式と交代式の話の時でしたが，係数が普通の実数や複素数ならばいいが，ヒョウスウ 2 の体のときには，$1+1=0$，従って $-1=1$ となるから，対称式と交代式の区別がつかなくなってしまうというのです．」

A 「それは当然そうなるなあ．」

B 「まるで他人事のようですね．一体ヒョウスウ 2 のタイというのは何ですか？　魚の国で選挙でもあったのですか？」

A 「ハッハッハ，その票数ではない．字は似ているが木辺のついた標数で characteristic の訳語だ．簡単だから定義をしてみよう．まず体というのは前にも話したが，実数や複素数と同じように加法と乗法が定義されていて通常の法則が成立する集合のことだ†)．K を一つの体とし，$1+1+\cdots+1$ というように 1 を m 個加えて得られる K の元を $m1$ とかくことにしよう．」（紙の上にかいて見せる．）

B 「$m1=m$ ではありませんか？」

A 「m というのは自然数，一方 $m1$ は K の元だから区別して考えなくてはいけない．そこで $m1$ が体 K のゼロ元と一致する，つまり $m1=0$ となるような自然数 m があるかどうかを考えてみる．」

---

†) 「雑談」VI, p. 220 の脚註参照.

B「１を加えていけば段々大きな数になりますから０になりっこありません.」

A「それは普通の実数体の場合には確かにそうだ. もっと一般に大小の概念の入ったいわゆる“順序体”のときにも同じことがいえる. しかし全く一般の抽象体 K では $m1=0$ ということも起り得る. そこでその場合, $m1=0$ となるような自然数 m の中で最小のもの m_0 —— それは実際は素数になるのだが —— を K の“標数”というのだ. もし実数体の場合のように $m1=0$ となる m が存在しないときには標数０という.（あるいは ∞ というべきかもしれないが.）」

B「どうして m_0 は素数になるのですか？」

A「それは何でもない. m_0 が素数でないとし, $m_0=m_1\cdot m_2$ と二つの自然数の積に分解されたとしよう. もちろん $m_1, m_2 < m_0$ とする. そうすれば K における乗法の分配律により

$$(m_1 1)(m_2 1) = m_0 1 = 0$$

となるが, m_0 は $m1=0$ となる最小の自然数のはずだったから, $m_1 1 \neq 0$, $m_2 1 \neq 0$. しかし体の中では０以外の元は皆逆元をもつから, この式の両辺に $(m_1 1)^{-1}$ をかければ,

$$m_2 1 = (m_1 1)^{-1}\cdot 0 = 0$$

となって矛盾だ.」

B「僕にはそもそも $m1=0$ という式が不合理なような気がしますが.」

A「それは記号の問題だろう. もし $m1=0$ というようなかき方が気に入らないのだったら, 体 K の単位元と零とを何か他の文字, 例えば E と O とで表わして $mE=O$ とかけば何も文句はあるまい.」

B「そうすると標数２の体とは $2E=O$ となるような体のことをいうわけですね.」

A「そうだ. 標数２の体の一番簡単な例としては O と E とだけからなる集合 $F_2=\{O, E\}$ に加法と乗法とを

$$O+O=O, \qquad O+E=E+O=E, \qquad E+E=O,$$

$$O\cdot O=O,\qquad O\cdot E=E\cdot O=O,\qquad E\cdot E=E$$

というように定義すれば，これが一つの体になる.」

B 「おや，この式はどこかで見たような気がしますよ．そうだ，去年の数学セミナー†)に T 先生がかいておられた“E と O”の計算ではありませんか？」

A 「そのとおり．ただし，ここでは記号 E と O とが逆になってしまったが，要するに有理整数の作る環 $\boldsymbol{Z}$ を modulo 2 で二つの“剰余類”（すなわち偶数の集合と奇数の集合）に分けたものが $\{O, E\}$ なのだ．同じようにして任意の素数 p に対して p 元体 $\boldsymbol{F}_p=\{O, E, 2E, \cdots, (p-1)E\}$ が作られる．…そうだ，今日は標数 2 の世界で線形代数をやるとどんなことが起るか少し話してみよう.」

B 「標数 2 ではずいぶん変なことが起るでしょうね.」

A 「ところがそれ程でもないのだ．もちろん標数 2 に独特のことは色々あるけれど，原則的にいえば変ったことはむしろ少いというべきだろう．そこが本当は一番不思議な所なのかもしれない … 」

2. 標数 p のベクトル空間

最初に標数 p の体での演算について少し注意をしておこう．例えば $p=2$ のときには

(1)
$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2=x^2+y^2.$$

従って次々に

$$(x+y)^4=(x^2+y^2)^2=x^4+y^4,$$
$$(x+y)^8=(x^4+y^4)^2=x^8+y^8,\quad \cdots$$

という公式が得られる．（これはまた直接に左辺を二項展開し，その中間項の係数が皆偶数，従って K においては $=0$ になることを見てもわかる.）よって帰納法により

(2)
$$(x+y)^{2^m}=x^{2^m}+y^{2^m}$$

---

†) 「数学セミナー」1974年11月号.

が証明される．一般に標数 p の体 K においては

$$(x+y)^{p^m}=x^{p^m}+y^{p^m} \tag{3}$$

という公式が証明される．

上式 (3) から色々面白いことがでてくるのだが，特に次の二つのことに注意しておこう．

1. 標数 p の体 K において 1 の p^m-乗根は 1 以外に存在しない．[(3) から $x^{p^m}-1=(x-1)^{p^m}$ が得られるから．]

2. 標数 p の体 K において，$a\in K$ の p-乗根が K の中に存在しないならば，多項式 x^p-a は“既約”である．(すなわち K を係数とする多項式の範囲ではこれ以上分解できない．) もし a の p-乗根 α が存在すれば，α は x^p-a の“p 重根”である：$x^p-a=(x-\alpha)^p$．[後半はやはり (3) から．前半の証明も簡単だが省略する．]

もう一つ，標数 p で特筆すべきことは $\boldsymbol{F}_p$ のような“有限体”が存在することである．今，K を標数 p の任意の有限体と仮定しよう．K の部分集合

$$\{0,\ 1,\ 2\cdot 1,\ \cdots,\ (p-1)1\}$$

は明らかに $\boldsymbol{F}_p$ と“同型”な部分体になるから，それを同一視して $\boldsymbol{F}_p\subset K$ と考えてよい．そうすれば，$a\in K$ に対し，$\beta\in\boldsymbol{F}_p$ による“スカラー乗法” $\beta\cdot a$ が定義されるから，K を $\boldsymbol{F}_p$ 上のベクトル空間とみなすことができる．その意味で K の $\boldsymbol{F}_p$ 上の“次元”を m (これを体の拡大 $K/\boldsymbol{F}_p$ の“次数”ともいう) とすれば，m 個の元からなる底 $(a_1,\cdots,a_m)$ が存在する．(K が有限体だから次元ももちろん有限である．) K の任意の元 x は

$$x=\xi_1a_1+\cdots+\xi_ma_m,\qquad \xi_i\in\boldsymbol{F}_p \tag{4}$$

の形に一意的に表わされる．よって K の元の個数は p^m である．

実際，任意の自然数 m に対して p^m 個の元からなる有限体が存在し，しかもそれらは同型を除いて一意的に定まることが証明される．(抽象代数の本，何でもよい，参照) 従って p^m 元体を $\boldsymbol{F}_{p^m}$ で表わすことにしよう．

例えば $\boldsymbol{F}_4$ を次のようにして作ることができる．普通の複素数体の中で 1

の3乗根 $\omega=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3})$ をとり

$$\alpha=m_1 1+m_2\omega \qquad (m_1, m_2\in \boldsymbol{Z}) \tag{5}$$

の形の複素数全体の集合（それを $\boldsymbol{Z}[\omega]$ で表わす）を考えれば，それは“部分環”になる，すなわち加減乗の演算に関して閉じている．加減に関しては明白だが，乗法に関しては

$$\begin{aligned}&(m_1 1+m_2\omega)(m_1{}'1+m_2{}'\omega)\\&=(m_1m_1{}')1+(m_1m_2{}'+m_2m_1{}')\omega+(m_2m_2{}')\omega^2\\&=(m_1m_1{}'-m_2m_2{}')1+(m_1m_2{}'+m_2m_1{}'-m_2m_2{}')\omega\end{aligned}$$

($\omega^2=-1-\omega$ だから)．そこで環 $\boldsymbol{Z}[\omega]$ を modulo 2 で剰余類に分ける，すなわち

$$\begin{aligned}&m_1 1+m_2\omega\equiv m_1{}'1+m_2{}'\omega \pmod 2\\&\Longleftrightarrow m_1-m_1{}',\ m_2-m_2{}' \text{ が共に偶数}\end{aligned}$$

によって定義される同値関係によって類別するのである．そうすれば，0, 1, ω, $1+\omega$ によって代表される4個の剰余類が生じるが，これが自然な演算に関して体になることは直ちにわかる．［一番問題なのは $\alpha\neq 0,1$ が逆元をもつことであるが，

$$\omega(1+\omega)=-1\equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\ 2)$$

であるから，ω, $1+\omega$ で代表される剰余類は互いに他の逆元になる.］よって4元体 $\boldsymbol{F}_4$ が得られた．

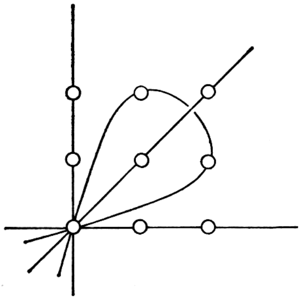
$\boldsymbol{Z}[\omega]$ のかわりに $\boldsymbol{Z}[i]$ $(i=\sqrt{-1})$ を mod 2 で考えるとやはり4個の元からなる環 $\{0, 1, i, 1+i\}$ が得られる．しかしこの場合には $(1+i)^2=2i\equiv 0 \pmod 2$ であるから，体にはならない．

標数 p の体 K の上で線形代数をやるとどうなるか？　ベクトル空間，部分空間，線形写像等の概念，さらにベクトル空間の次元，線形写像（行列）の階数等々は何の変更もなくそのまま標数 p の場合にも通用する．（そのことはすでに (4) の所で使った.）実際，線形代数の重要な部分は標数に関係なくどんな体の場合にも適用できる．これは線形代数の大きな特徴である．

特に $K=\boldsymbol{F}_{p^m}$, V を K 上の n 次元ベクトル空間とすれば，前に有限体

の元の個数を数えたのと同じ論法によって V は p^{mn} 個のベクトルからなることがわかる．従ってこの場合，部分空間や線形写像を具体的に数え上げることができる．

例えば $\boldsymbol{F}_3$ の上の２次元ベクトル空間は図に示したように４本の直線（１次元部分空間）を含む．また $\boldsymbol{F}_4$ の上の２次元ベクトル空間は５本の直線を含む（問１参照）．



3. 対称式と交代式

対称式の定義はくり返すまでもないだろう．n 個の変数 $x_1, \cdots, x_n$ の多項式 $f(x_1, \cdots, x_n)$ が“対称式”であるとは f が変数のどんな置換に対しても不変なことをいう．f が“交代式”であるとは普通（標数２でないとき）f が変数の互換に対して符号を変える，すなわち条件

(A1)　　$$f(\cdots, \underset{i}{\underbrace{x_j}}, \cdots, \underset{j}{\underbrace{x_i}}, \cdots) = -f(\cdots, x_i, \cdots, x_j, \cdots)$$

を満足する多項式であることと定義する．

f の係数が属する体 K が標数２でないときには，この定義から出発して普通の代数の教科書にかいてあるのと同じ結果に到達する．まず (A1) で $x_i = x_j$ とおくと

$$f(\cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots) = -f(\cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots).$$

従って

(6)　　$$2f(\cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots) = 0.$$

標数２ではないから $2\cdot 1 \neq 0$ は逆元をもつ．従って (6) の両辺を $2\cdot 1$ で

割って

$$(7)\qquad f(\cdots, x_i, \cdots, x_i, \cdots)=0$$

を得る．剰余定理により (7) は f が多項式として x_j-x_i で割り切れることを意味する．これが任意の（相異なる）i,j の組に対していえるから，結局 f は“差積”

$$\varDelta(x_1, \cdots, x_n)=\prod_{i<j}(x_i-x_j)$$

によって割り切れる：$\varDelta|f$．よって

$$(8)\qquad f(x_1, \cdots, x_n)=g(x_1, \cdots, x_n)\varDelta(x_1, \cdots, x_n)$$

とおけば，g は明らかに対称式である．従ってよく知られているように g はさらに“基本対称式”の多項式として表わされる†)．

K の標数が 2 のときには（“先生”のおっしゃるように）(A1) は f が対称であるということと同じである．この場合 (6) は $0=0$ となってしまうから，(A1) から (7) を導くことはできない．そこでこの場合には

(A2)　f において $x_i=x_j$ とおけば，$f=0$,

すなわち (7) が成立することを追加条件として交代式を定義するのがよいであろう．そうすれば上と同様にして交代式が必ず差積 $\varDelta$ で割り切れる．結局，標数 2 の場合には「交代式とは差積 $\varDelta$ の倍数になるような対称式」ということができる．対称式が基本対称式によって表わされることに変りはないから，任意の交代式（特に差積）も基本対称式の多項式として表わされる（問 2 参照）††)．

4. 標数 2 の行列式

行列式は（変ベクトルに関する）一種の交代式である．以前と記号を少し変えて，X を n^2 個の変数 ξ_{ij} $(1\leqslant i, j\leqslant n)$ を成分にもつ n 次正方行列とし，X の列ベクトルを $x_1, \cdots, x_n$ で表わす：

---

†) 例えば「数学セミナー」1974年12月号，遠山啓「n 変数の対称式」参照．

††) 差積の平方 $\varDelta^2$（判別式）を基本対称式によって表わす式は（標数に関係なく）Sylvester の行列式によって与えられる．

(9)
$$X=(x_1,\cdots,x_n)=(\xi_{ij}).$$

係数体 K の標数が２のとき，X の行列式は定義により

(10)
$$\det(X)=\sum_{(i_1,\cdots,i_n)}\xi_{i_1 1}\xi_{i_2 2}\cdots\xi_{i_n n}$$

によって与えられる．ここに $\sum$ は $n!$ 個の"順列"全体にわたる和を表わす．標数２だから符号の心配はしなくてもよい．例えば $n=2$ のとき

$$\det(X)=\xi_{11}\xi_{22}+\xi_{21}\xi_{12}$$

である．

さて $\det(X)$ を n 個の列ベクトル $x_1,\cdots,x_n$ の関数とみて

(11)
$$\det(X)=D(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

とかくことにしよう．そのとき D は次のような性質をもつ：

(D0)　D は各列 x_j に関して線形である．すなわち

(12)
$$D(\cdots,x_j+x_j',\cdots)=D(\cdots,x_j,\cdots)+D(\cdots,x_j',\cdots),$$

(13)
$$D(\cdots,\alpha x_j,\cdots)=\alpha D(\cdots,x_j,\cdots),$$

ただしこれらの式で j 番目以外の変数（変ベクトル）x_k は固定しておくものとする．

(D1)
$$D(\cdots,\underset{\smile}{\overset{i}{x_j}},\cdots,\underset{\smile}{\overset{j}{x_i}},\cdots)=D(\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots).$$

(D2)
$$D(\cdots,\overset{i}{x_i},\cdots,\overset{j}{x_i},\cdots)=0.$$

性質 (D1), (D2) はさっき述べた交代式の性質 (A1), (A2) に対応する．この意味で（標数２のときにも）行列式は列ベクトルの交代式になるのである．

(D0) は $\det(X)$ の定義式 (10) の右辺が x_j の成分 ξ_{ij} $(1\leqslant i\leqslant n)$ に関する斉一次式になっていることから明らかだろう．(D1) は (D0) と (D2) とから導かれる．実際，(D2) を仮定すれば (12) により

$$\begin{aligned}0&=D(\cdots,\overset{i}{x_i+x_j},\cdots,\overset{j}{x_i+x_j},\cdots)\\&=D(\cdots,x_i,\cdots,x_i,\cdots)+D(\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots)\\&\quad+D(\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots)+D(\cdots,x_j,\cdots,x_j,\cdots).\end{aligned}$$

ここで第1，第4項は（D2）により ＝0 となるから，（D1）を得る．

（D2）の証明：簡単のため，$i=1, j=2$ としてやる．定義式（10）において $(i_1, \cdots, i_n)$ は $(1, \cdots, n)$ の順列だから $i_1 < i_2$ か $i_1 > i_2$ かいずれかである．第2の場合，i_1 と i_2 を交換すれば第1の条件をみたす順列が得られる．よって

$$\det(X) = \sum_{\substack{(i_1, \cdots, i_n) \\ i_1 > i_2}} (\xi_{i_1 1}\xi_{i_2 2} + \xi_{i_2 1}\xi_{i_1 2})\xi_{i_3 3} \cdots \xi_{i_n n}.$$

$x_1 = x_2$ とおけば

$$\xi_{i_1 1}\xi_{i_2 2} + \xi_{i_2 1}\xi_{i_1 2} = \xi_{i_1 1}\xi_{i_2 1} + \xi_{i_2 1}\xi_{i_1 1} = 0.$$

よって $\det(X) = 0$ となる．（証終）

以上から標数2のときにも行列式の理論は原則的にはそのまま通用する．従って線形代数における固有多項式に関係したことも OK である．しかし最初に注意したように標数2（一般に p）のときの多項式には標数0のときとは異なる現象が生じる．

その一例として標数2のときの巡回行列式

$$C(\xi_1, \cdots, \xi_n) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & & \cdots & & \xi_n \\ \xi_n & \xi_1 & \xi_2 & & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & & & \\ & \cdots & & \xi_n & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & & \cdots & & \xi_n & \xi_1 \end{vmatrix} \tag{14}$$

を考えてみよう．n が奇数のとき，K に1の原始 n 乗根が含まれていれば，標数0のときと全く同様に計算できる．しかし n が偶数のときには1の原始 n 乗根は存在し得ないから事情が異なってくる．例えば $n=2$ のとき

$$C(\xi_1, \xi_2) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_1 \end{vmatrix} = \xi_1{}^2 + \xi_2{}^2 = (\xi_1 + \xi_2)^2.$$

$n=4$ の場合を考えてみよう．

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

とおけば

(15)　　$$C(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=\det(\xi_1 1_4+\xi_2 P+\xi_3 P^2+\xi_4 P^3).$$

まず P の固有値を求めよう．

$$\begin{vmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\1&0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda\begin{vmatrix}\lambda&1&0\\0&\lambda&1\\0&0&\lambda\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}0&1&0\\0&\lambda&1\\1&0&\lambda\end{vmatrix}{}^{\dagger)}$$

$$=\lambda^4+1=(\lambda+1)^4$$

であるから固有値は1だけでその重複度は4である．従って

$$P\sim\begin{pmatrix}1&&&*\\&1&&\\&&1&\\0&&&1\end{pmatrix}.$$

よって $\xi=\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4$ とおけば

$$\xi_1 1+\xi_2 P+\xi_3 P^2+\xi_4 P^3\sim\begin{pmatrix}\xi&&&*\\&\xi&&\\&&\xi&\\0&&&\xi\end{pmatrix}.$$

よって (15) から

(16)　　$$C(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)=(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4)^4$$

を得る．

実際 P のジョルダン標準形が

---

†) 行列式の展開を使った．標数2だから符号をつけなくてよいので気楽である．

$$P \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となることも容易にわかるが，われわれの目的のためには必要でない．

標数2の線形代数で一番問題なのは二次形式と対称双一次形式の対応であるが，それについては次回にまわすことにしよう．

問 1.　$(\boldsymbol{F}_4)^2$（$\boldsymbol{F}_4$ 上の2次元数ベクトル空間）の1次元部分空間を具体的に列記せよ．一般に $(\boldsymbol{F}_{p^m})^2$ は幾本の直線を含むだろうか？

問 2.　標数2のとき差積 $\Delta(x_1, x_2, x_3)$ を基本対称式 $s_1 = x_1+x_2+x_3$, $s_2 = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$, $s_3 = x_1x_2x_3$ によって表わせ．

問 3.　$C(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を $\boldsymbol{F}_4$ において計算せよ．同じ式を $\boldsymbol{F}_3$ で計算するとどうなるか？

V

2次形式，3次形式，etc.

1. 対称双一次形式と2次形式

前回にひき続き標数2の線形代数の話をしよう．今日の話題は対称双一次形式（関数）と2次形式との対応関係である．

Vを体 K の上の n 次元ベクトル空間とし，便宜上その一つの底 (e_i) を固定しておく．$x \in V$ の底 (e_i) に関する成分ベクトルが (ξ_i) であるとき，すなわち，$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$ であるとき，$x = (e_i)(\xi_i)$ とかく．

まず体 K の"標数"が2でないときのことから復習することにしよう．B を $V \times V$ 上の双一次形式†)とし

$$(1) \qquad (\theta B)(x, y) = B(y, x) \qquad (x, y \in V)$$

とおく．$\theta B = B$ のとき B を**対称**，$\theta B = -B$ のとき B を**交代**（歪対称）という．任意の双一次形式に対して

$$(2) \qquad S = \frac{1}{2}(B+\theta B), \qquad A = \frac{1}{2}(B-\theta B)$$

とおけば††)，明らかに S は対称，A は交代双一次形式で

$$(3) \qquad B = S+A$$

となる．すなわち，任意の双一次形式は対称なものと交代なものとの和として表わされる．しかもこのような表示がただ一通りしかないことも容易にわ

---

†) ここでは"双一次形式"という言葉を"双一次関数"（すなわち Hom($V\times V$, K) の元）の意味で使う．"2次形式"という言葉についても同様である．

††) これらの式における2はもちろん体 K における $1+1$ を意味する．(2·1 とかくべき所だが，わずらわしいので単に2とかく.) K の標数が2でないから，$2 \neq 0$，従って K の中に2の逆数 1/2 が存在する．すなわち，2による除法が可能である．

かる．以下，対称双一次形式全体の作る空間を $\mathscr{S}$，交代双一次形式全体の作る空間を $\mathscr{A}$ とかくことにしよう．$\mathscr{S}$ と $\mathscr{A}$ は $\mathrm{Hom}(V\times V, K)$（$V\times V$ 上の双一次形式全体の作るベクトル空間）の部分空間で，対応する行列の空間を考えてみればすぐわかるように

$$\text{(4)} \qquad \dim \mathscr{S} = \frac{1}{2}n(n+1), \qquad \dim \mathscr{A} = \frac{1}{2}n(n-1)$$

である．上に述べたことをベクトル空間の言葉でいえば $\mathrm{Hom}(V\times V, K)$ が二つの部分空間 $\mathscr{S}$ と $\mathscr{A}$ との"直和"に分解されるということである．

さて $S\in\mathscr{S}$ に対して

$$\text{(5)} \qquad Q(x) = S(x, x)$$

とおけば，Q は V 上の"2次形式"になる．その意味は $Q(x)$ が x の成分 ξ_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ に関する斉次2次関数になるということである．実際

$$(S(e_i, e_j)) = (\alpha_{ij}), \qquad x = (e_i)(\xi_i), \qquad y = (e_i)(\eta_i)$$

とおけば

$$\text{(6)} \qquad S(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i\eta_j, \qquad (\alpha_{ij} = \alpha_{ji})$$

従って

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} Q(x) &= \sum \alpha_{ij}\xi_i\xi_j \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}\xi_i^2 + 2\sum_{i<j} \alpha_{ij}\xi_i\xi_j \end{aligned}$$

となるから，$Q(x)$ は V 上の2次形式である．(5) から（あるいは (6), (7) から）直ちに

$$\text{(8)} \qquad Q(\alpha x) = \alpha^2 Q(x),$$

$$\text{(9)} \qquad Q(x+y) = Q(x) + Q(y) + 2S(x, y)$$

等の関係式が得られる．V 上の2次形式全体の集合も明らかに（関数としてのベクトル演算に関して）一つのベクトル空間になる．それを $\mathcal{Q}$ で表わすことにしよう．2次形式 $Q(x)$ は（底を固定したとき）$\frac{1}{2}n(n+1)$ 個の係数によって定まるから

$$\text{(10)} \qquad \dim \mathcal{Q} = \frac{1}{2}n(n+1)$$

である．

上記においては，$S \in \mathcal{S}$ から $Q \in \mathcal{Q}$ を作った．$S \in \mathcal{S}$ に対し (5) によって定義される $Q \in \mathcal{Q}$ を φS とかくことにしよう．φ は明らかに $\mathcal{S}$ から $\mathcal{Q}$ の中への線形写像であるが，実際それは $\mathcal{S}$ から $\mathcal{Q}$ の上への“同型写像”になる．それを見るためには，与えられた $Q \in \mathcal{Q}$ に対して，$\varphi S = Q$ となるような $S \in \mathcal{S}$ がただ一通りに定まることをいえばよい．2 次形式

(11) $$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \xi_i^2 + \sum_{i<j} \beta_{ij} \xi_i \xi_j$$

が与えられたとき

(12) $$\alpha_{ij} = \begin{cases} \beta_i & (i=j) \\ \dfrac{1}{2}\beta_{ij} & (i<j) \\ \dfrac{1}{2}\beta_{ji} & (i>j) \end{cases}$$

によって α_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ を定義し，(α_{ij}) を係数行列とする双一次形式を S とすれば，明らかに，$S \in \mathcal{S}$ で $\varphi S = Q$ となる．しかもこれが $\varphi S = Q$ の唯一つの解であることも明白であろう．

このように標数が 2 でないときには $\mathcal{S}$ から $\mathcal{Q}$ の上への“標準的”同型 φ が存在する：

(13) $$\varphi : \mathcal{S} \xrightarrow{\cong} \mathcal{Q},$$
$$(\varphi S)(x) = S(x, x).$$

(9) からわかるように φ の逆写像 φ^{-1} は

(14) $$(\varphi^{-1}Q)(x, y) = \frac{1}{2}\{Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\}$$

によって与えられる．

なお，標数が 2 でないときの著しい結果として，任意の 2 次形式 $Q(x)$ が底の変換によって

(15) $$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \xi_i'^2$$

の形に変換される．行列の言葉でいえば，任意の対称行列は対角行列に（I

で説明した $\simeq$ の意味で）同値になる．これも簡単だから序でに証明しておこう．

証明． n に関する帰納法．$n=1$ のときは自明である．$n>1$ とする．$Q(x)$ が恒等的に 0 に等しいときも自明だから，$Q(x)\not\equiv 0$ とし，$Q(a_1)\neq 0$ であるような $a_1\in V$ をとる．$S=\varphi^{-1}Q$ とし

$$V_1=\{\,x\in V\mid S(a_1,x)=0\,\}$$

とおけば，$\dim V_1\geqslant n-1$ であるが，$a_1\notin V_1$ であるから実際 $\dim V_1=n-1$ になる．従って帰納法の仮定により V_1 の底 $(a_2,\cdots,a_n)$ で

$$S(a_i,a_j)=0 \qquad (2\leqslant i<j\leqslant n)$$

となるものが存在する．そのとき $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ は V の底になり，それに関する S の行列 $(S(a_i,a_j))$ は対角行列になる．従って

$$S(a_i,a_i)=\alpha_i{}', \qquad x=(a_i)(\xi_i{}')$$

とおけば，(15) が成立する．（証終）

2. 標数 2 の場合

上述のことは標数 2 のときにはどうなるだろうか？ (2), (12), (14) 等 K における 2 による割算を含む式はもちろん通用しない．

まず第一に標数 2 の体 K の上では，$-B=B$ であるから，交代双一次形式を上のように定義したのでは対称双一次形式と同じことになってしまう．そこで前回に説明した交代式の定義にならって，条件

$$(16) \qquad B(x,x)=0 \qquad (x\in V)$$

をみたすような双一次形式を**交代**ということにし，この意味での交代双一次形式全体の空間を $\mathcal{A}$ とかくことにする．前回の行列式の所で説明したように，双一次形式に関しては "交代" $\Longrightarrow$ "対称" であるから $\mathcal{A}\subset\mathcal{S}$ である．

さて，前と同様 V 上の 2 次形式の空間を $\mathcal{Q}$ で表わし，(5) によって一次写像 $\varphi\colon \mathcal{S}\longrightarrow\mathcal{Q}$ を定義する．一方 $Q\in\mathcal{Q}$ に対して

$$(17) \qquad (\psi Q)(x,y)=Q(x+y)-Q(x)-Q(y)$$

とおけば，$\psi Q\in\mathcal{S}$ で ψ は $\mathcal{Q}$ から $\mathcal{S}$ の中への一次写像になる．実際，

$$Q(x)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\xi_i^2+\sum_{i<j}\beta_{ij}\xi_i\xi_j$$

とおけば

$$Q(x+y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i(\xi_i+\eta_i)^2+\sum_{i<j}\beta_{ij}(\xi_i+\eta_i)(\xi_j+\eta_j).$$

ここで $(\xi_i+\eta_i)^2=\xi_i^2+\eta_i^2$ に注意すれば，容易に

(18) $$(\psi Q)(x,y)=\sum_{i<j}\beta_{ij}(\xi_i\eta_j+\xi_j\eta_i)$$

を得る．従って $\psi Q\in\mathcal{S}$．写像 ψ が線形なことは明らかである．

さて，$S\in\mathcal{S}$ に対し

$$\begin{aligned}\psi(\varphi S)(x,y)&=S(x+y,x+y)-S(x,x)-S(y,y)\\&=2S(x,y)=0.\end{aligned}$$

また $Q\in\mathcal{Q}$ に対し

$$\begin{aligned}\varphi(\psi Q)(x)&=Q(x+x)-Q(x)-Q(x)\\&=2Q(x)=0.\end{aligned}$$

従って $\psi\circ\varphi=0$, $\varphi\circ\psi=0$ である．一次写像 φ,ψ の“核”を

$$\operatorname{Ker}\varphi=\{S\in\mathcal{S}\mid\varphi S=0\},\qquad\operatorname{Ker}\psi=\{Q\in\mathcal{Q}\mid\psi Q=0\}$$

とおけば，上式から関係式

$$\varphi(\mathcal{S})\subset\operatorname{Ker}\psi,\qquad\psi(\mathcal{Q})\subset\operatorname{Ker}\varphi$$

を得る．ここで実際等号が成立することを証明しよう．

$S\in\mathcal{S}$ が (6) によって与えられるとき φS は (7) によって与えられる．標数2だから

(19) $$(\varphi S)(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ii}\xi_i^2.$$

いま“対角型”の2次形式（すなわち $\sum_{i=1}^{n}\beta_i\xi_i^2$ の形のもの）全体の作る空間を $\mathcal{Q}_0$ とおけば，(19) から $\varphi(\mathcal{S})=\mathcal{Q}_0$．一方 (18) から

$$\begin{aligned}\psi Q=0&\Longleftrightarrow\beta_{ij}=0\qquad(i<j)\\&\Longleftrightarrow Q\in\mathcal{Q}_0.\end{aligned}$$

従って

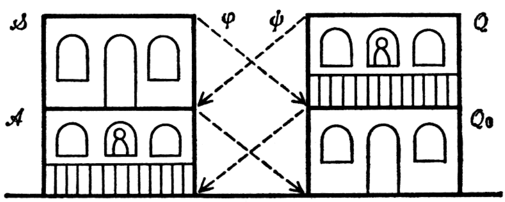
(20) $$\varphi(\mathscr{S}) = \mathrm{Ker}\,\psi = \mathcal{Q}_0.$$

を得る．同様にして (18), (19) から

(21) $$\psi(\mathcal{Q}) = \mathrm{Ker}\,\varphi = \mathscr{A}$$

も得られる．(問 1)

このことを譬えていえば，標数が2でないとき二つの建築物 $\mathscr{S}$ と $\mathcal{Q}$ とはそっくり同じ構造をもっていたのだが，標数が2のときには $\mathscr{S}$ と $\mathcal{Q}$ はそれぞれ二階建ての構造をもち，$\mathscr{S}$ の一階と $\mathcal{Q}$ の二階が，また $\mathscr{S}$ の二階と $\mathcal{Q}$ の一階が同じ構造をもつ，すなわち上下の構造が入れ違いになっているのである．



上の考察からの一つの結論は標数2のときにも $\mathscr{A}$ の次元は前と同じ式 (4) によって与えられることである．もう一つのもっと大事なことは，2次形式が“対角型”であるかどうかは底のとり方に関係なく定まるということ，すなわち一つの2次形式がある底に関して対角型でないならば，どんな底の変換に対しても決して対角化されないということである．実際，φ や ψ は底のとり方に関係なく定義されたから，(20) により $\mathcal{Q}_0$ も同様である．——これは標数が2でないとき任意の2次形式が対角化可能であったことと著しい対照をなす．

3. 標数2は役に立つか？

B「なるほど，標数2の線形代数もなかなか面白いものですね．普通の実数の場合と全然違うのかと思うと似ている所もあり，全体としてはやはり調和がとれている感じですね．」

A「うむ，そこが数学の神秘的な所だ．今話したのは2次形式論のほん

の入口だが，先に進めばもっと面白いことが色々ある.」

B「ところで標数2の数学は実際何かの役に立つのですか？　面白いだけでただの“遊び”ではないのですか？」

A「うーむ，その質問には二通りの答がある．もし日常的な意味で役に立つかというのなら，答は多分 No だろう．しかしそれが数学の中で有用かどうかといえば，答は大いに Yes! だ．整数論でも代数幾何でも，はたまたトポロジーでも標数 p なしにすますことはできない．標数0の問題を解くのに標数 p を経由して考えることもしばしばある．おじさんの考えでは，数学の理論に関する限り，この数学の中で役に立つということの方が大事だと思うよ.」

B「なるほど，それでおじさんも内べんけいなのですね．ところで今日のお話は2次形式と双一次形式の対応についてでしたが，3次形式の場合はどうなるのですか？　やはり同じようなことがいえるのですか？」

A「うむ，それは良い質問だ．それでは一つ3次形式の場合のことを少し考えてみよう．この場合には標数2と3とが例外になるはずだ … 」

4. 3次形式の場合

Fを $V\times V\times V$ 上の三重一次形式とする．$F(x,y,z)$ $(x,y,z\in V)$ が x,y,z のどんな置換に対しても不変なとき“対称”といい，x,y,z の中の任意の二つの交換によって符号を変えるとき（従って変数 x,y,z の“偶置換”に対しては不変，“奇置換”に対しては符号を変えるとき)，“交代”という．標数が2のときには例によって交代の定義を，すべての x,y に対し

$$F(x,x,y)=F(x,y,x)=F(y,x,x)=0 \tag{22}$$

をみたすもの，と定義し直す必要がある．前と同様，対称（または交代）三重一次形式全体の空間を $\mathscr{S}$（または $\mathscr{A}$）で表わす．また V 上の3次形式全体の空間を $\mathscr{C}$ で表わす．

さて $S\in\mathscr{S}$ に対し

$$C(x)=S(x,x,x) \tag{23}$$

とおくことにより，$C\in\mathcal{C}$ が得られる．この対応を前と同様 $C=\varphi S$ とかくことにしよう．このとき

$$
\begin{aligned}
C(x+y+z) = C(x)+C(y)+C(z)\\
+3\{S(x,x,y)+S(x,x,z)+S(x,y,y)\\
+S(x,z,z)+S(y,y,z)+S(y,z,z)\}\\
+6S(x,y,z)
\end{aligned}
$$

が成立する．この中間項を消去するために

$$C(x+y)=C(x)+C(y)+3S(x,x,y)+3S(x,y,y),$$

および $C(x+z)$, $C(y+z)$ を考えれば直ちに

$$
\begin{aligned}
C(x+y+z)-C(x+y)-C(x+z)-C(y+z)\\
+C(x)+C(y)+C(z)\\
=6S(x,y,z)
\end{aligned}
\tag{24}
$$

という関係式が得られる．従って一般に $C\in\mathcal{C}$ に対して ψC を (24) の左辺の式によって定義することにすれば，(24) は $\psi(\varphi S)=6S$ を意味する．一方，

$$
\begin{aligned}
(\varphi(\psi C))(x) &= C(3x)-3C(2x)+3C(x)\\
&= (3^3-3\cdot 2^3+3)C(x)=6C(x)
\end{aligned}
$$

であるから，$\varphi(\psi C)=6C$．従って標数が 2 や 3 でないときには，φ は $\mathcal{S}$ から $\mathcal{C}$ の上への同型写像になり，$\varphi^{-1}=\dfrac{1}{6}\psi$ である．

標数 2 や 3 の場合，φ と ψ との関係をしらべるために $S\in\mathcal{S}$ を

$$S(x,y,z)=\sum_{i,j,k=1}^{n}\alpha_{ijk}\xi_i\eta_j\zeta_k \tag{25}$$

とおく．ただし $(\xi_i),(\eta_i),(\zeta_i)$ はそれぞれ x,y,z の成分ベクトルを表わす．F が対称だから係数 α_{ijk} も添数 i,j,k に関して対称（すなわちその置換に対して不変）である．(25) から

$$
\begin{aligned}
(\varphi S)(x) &= \sum_{i,j,k=1}^{n}\alpha_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k\\
&= \sum\alpha_{iii}\xi_i^3+3\sum_{i\neq j}\alpha_{iij}\xi_i^2\xi_j+6\sum_{i<j<k}\alpha_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k
\end{aligned}
\tag{26}
$$

を得る．例えば $\xi_1^2\xi_2$ という項は $\xi_1\xi_1\xi_2$, $\xi_1\xi_2\xi_1$, $\xi_2\xi_1\xi_1$ として3回現われ，しかも その係数 α_{112}, α_{121}, α_{211} は相等しいから，これら3項をまとめて $3\alpha_{112}\xi_1^2\xi_2$ とかくのである．一方，任意の $C\in\mathcal{C}$ は

$$(27)\qquad C(x)=\sum\beta_i\xi_i^3+\sum_{i\neq j}\beta_{ij}\xi_i^2\xi_j+\sum_{i<j<k}\beta_{ijk}\xi_i\xi_j\xi_k$$

の形に一意的に表わされ，"簡単な"（本当は少し面倒な）計算により

$$(28)\quad (\phi C)(x,y,z)=6\sum_{i=1}^{n}\beta_i\xi_i\eta_i\zeta_i$$
$$+2\sum_{i\neq j}\beta_{ij}(\xi_i\eta_i\zeta_j++\xi_i\eta_j\zeta_i+\xi_j\eta_i\zeta_i)$$
$$+\sum_{i<j<k}\beta_{ijk}(\xi_i\eta_j\zeta_k+\xi_i\eta_k\zeta_j+\xi_j\eta_i\zeta_k+\xi_j\eta_k\zeta_i$$
$$+\xi_k\eta_i\zeta_j+\xi_k\eta_j\zeta_i)$$

を得る．これらの式から，標数2のときには

$$\varphi(\mathcal{S})=\operatorname{Ker}\phi=\{\,C\in\mathcal{C}\mid\beta_{ijk}=0\,\},$$
$$\phi(\mathcal{C})=\operatorname{Ker}\varphi=\{\,S\in\mathcal{S}\mid\alpha_{iii}=\alpha_{iij}=0\,\}=\mathcal{A},$$

また標数3のときには

$$\varphi(\mathcal{S})=\operatorname{Ker}\phi=\{\,C\in\mathcal{C}\mid\beta_{ij}=\beta_{ijk}=0\,\},$$
$$\phi(\mathcal{C})=\operatorname{Ker}\varphi=\{\,S\in\mathcal{S}\mid\alpha_{iii}=0\,\}$$

となることがわかる．従ってこの場合にも $\mathcal{S}$ と $\mathcal{C}$ はそれぞれ上下反対の二階建て構造をもつ.（しかし標数2と3とではその構造が少し違っている.）

さて，ここまでくれば一般の m 次形式の場合を予想することもそう難しくないが，それは読者の研究に委ねることにしよう．参考のために V の上の m 次形式 f に対称 m 重一次形式を対応させる写像 ϕ_m の一般形をかいておこう：

$$(29)\quad (\phi_m f)(x_1,\cdots,x_m)=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{m-r}\sum_{i_1<\cdots<i_r}f(x_{i_1}+\cdots+x_{i_r}).$$

これは勿論 $m=2,3$ の場合の ϕ の拡張である．m 次形式の場合には $p\leqslant m$ であるような素数 p が例外的な標数になる[†]．

---

†）一般の場合，例外の標数 p に対して $\varphi(\mathcal{S})\subset\operatorname{Ker}\phi$ は成立するが，等号は必ずしも成立しない．

問 1.　標数2の場合，(21) および $\dim \mathscr{A} = \dfrac{1}{2}n(n-1)$ を証明せよ．

問 2.　ベクトル空間 V 上の任意の関数 f に対し $\psi_2 f, \psi_3 f$ を (29) によって定義する．そのとき

$$(\psi_3 f)(x_1, x_2, x_3) = (\psi_2 f)(x_1, x_2+x_3)-(\psi_2 f)(x_1, x_2)-(\psi_2 f)(x_1, x_3)$$
$$(x_1, x_2, x_3 \in V)$$

を証明せよ．またこの式から，特に f が2次形式のとき $\psi_3 f$ が恒等的に0であることを導け（標数は任意）．

問 3.　K の標数が2や3でないとき，$V\times V\times V$ 上の三重一次形式 F で条件

$$F(x, y, z)+F(y, z, x)+F(z, x, y) = 0 \qquad (x, y, z \in V)$$

をみたすもの全体の空間を $\mathscr{A}'$ で表わせば

$$\mathrm{Hom}(V\times V\times V, K) = \mathscr{S}\oplus\mathscr{A}\oplus\mathscr{A}'$$

と直和分解されることを示せ．

VI

P. I. D. の上の加群

1. ベクトル空間の拡張

B 「おじさん，今学期ももう終りですね．今日は代数の最後の時間に先生がアーベル群の基本定理の話をされましたよ．ただし証明は抜きでしたが.」

A 「証明はちょっと厄介だからね.」

B 「あの定理は整数の素因数分解の定理にどこか似ていますね.」

A 「似ているどころか，この二つは親戚関係にある定理だよ.」

B 「そのとき先生が線形代数の基本定理，ジョルダンの標準形のことも同じ考えで出せる，しかし時間がないから自分で本を読めといわれました.」

A 「なるほど，講義では面白い話は大てい時間がなくなって，できなくなってしまうものだよ.」

B 「おじさん流にいえば，ジョルダン標準形もアーベル群の定理と同じ親戚仲間ということになりますね．それでファン・デル・ヴェルデンのドコソコ[†]を読めといわれたのですが，僕はドイツ語は苦手だし，おじさんにきいた方が手っ取り早いと思ってやってきたのです.」

A 「手っ取り早く習ったことは手っ取り早く忘れてしまうものさ．まあ順々に話していくことにしよう．…まずベクトル空間の概念がどういうふうに拡張されるかを考えてみよう.」

B 「無限次元のベクトル空間もあるとききましたが.」

---

†) B. L. van der Waerden, Algebra II, Heidelberger Taschenbücher 23, Springer-Verlag, 1967, §§ 84–89. (邦訳，東京図書)

A 「うむ．解析で扱う関数空間というものは大てい無限次元になる．そこでその抽象化として，内積やノルムの入った無限次元ベクトル空間，いわゆる“Hilbert 空間”や“Banach 空間”などが考えられている．一方，微分幾何では“ベクトル・バンドル”という，いわばベクトル空間の連続的な族を考えたりする．そのセクションがつまり“ベクトル場”なのだ．前に話したテンソルも実際にはテンソル場として登場するわけだ．」

B 「良くわかりませんが，物理で習った重力場とか磁場なんかもそのベクトル場の一種ですか？」

A 「そうだ．…しかし今日話したいのはもう一つ別の方向の拡張，代数や整数論における拡張のことだ．」

B （小声で）「余りもったいぶらずに手っ取り早くお願いしたいものですね．」

A 「つまりベクトル空間というものは一つの体 K が作用している加群 (module) だと考えられる．そこでその体をもっと一般の“環”でおきかえるのだ．」

B 「そんなことをして何かいいことがあるのですか？」

A 「それは沢山ある．例えば（有限）群の表現論などはこういう見方から非常に見通しよく説明できる．しかしその手近な一つの応用として，さっき君のいったアーベル群の基本定理とジョルダン標準形とを統一的に扱うことができるのだ．それではまず P. I. D. の上の加群の話から始めることにしよう．… 」

2. 環の上の加群

環の話はいろいろな所に出ているから多分もうお馴みだろうと思う．念のために定義をすれば，集合 R に二つの演算，加法と乗法，が定義されていて次のような条件をみたすとき R は環 (ring) であるという．まず加法については

(A1)　$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$　（可換律）;

(A2)　$(\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$　（結合律）；

(A3)　0と称する特定の元があって，任意の $\alpha \in R$ に対し

$$\alpha+0 = \alpha;$$

(A4)　任意の $\alpha \in R$ に対し，その逆元 $-\alpha$ が存在して

$$\alpha+(-\alpha) = 0.$$

以上四つの条件は要するに R が加法に関して可換群になるということである．乗法についてはここでは次の三条件を仮定する：

(M1)　$\alpha\beta = \beta\alpha$　（可換律）；

(M2)　$(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$　（結合律）；

(M3)　1と称する特定の元（“単位元”）があって，任意の $\alpha \in R$ に対し

$$\alpha 1 = \alpha.$$

最後に加法と乗法との間の関係として

(AM)　$(\alpha+\beta)\gamma = \alpha\gamma+\beta\gamma$　（分配律）

を仮定する．［普通，環というときには (M1), (M3) は仮定しない．上に定義した環は“単位元をもつ可換環”というべきだが，ここでは簡単のため単に“環”ということにする.］

体はもちろん環の一種である†)．その他に環の例として有理整数環 $\boldsymbol{Z}$，体 K の上の多項式環 $K[x]$ など周知であろう．

さて環 R が与えられたとき，R 上の**加群**，あるいは略して R-**加群**というのは次のようなもののことである．集合 L に二つの演算，加法と R の元による乗法，とが定義されていて，まず加法については条件 (A1)～(A4) が成立する．“R の元による乗法”とは $\alpha \in R, x \in L$ に対して“積” $\alpha x \in L$ を対応させる操作であり，それに関して (M2), (M3), (AM) と類似の法則：

(1)　$1x = x,$

(2)　$(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x),$

(3)　$(\alpha+\beta)x = \alpha x+\beta x, \qquad \alpha(x+y) = \alpha x+\alpha y$

---

†) 上記 (A1)～(AM) の他にさらに (M4′) “任意の $\alpha \in R$, $\alpha \neq 0$ に対し，その（乗法的）逆元 α^{-1} が存在して $\alpha \cdot \alpha^{-1} = 1$” が成立するとき R を**体** (field) というのである．

が成立することを仮定する．ただし，$\alpha, \beta, \gamma, \cdots$ 等ギリシャ文字は環 R の元，$x, y, z, \cdots$ 等ローマ字は加群 L の元を表わすものと約束する．以上の定義は要するにベクトル空間の公理で体 K のところを環 R でおきかえたものに過ぎない．環 R の零元も加群 L の零元もともに0で表わす．（どちらの0かは前後の事情からわかるはず．）そのとき任意の $\alpha \in R, x \in L$ に対して

$$\alpha 0 = 0x = 0 \tag{4}$$

が成立することはベクトル空間の場合と同様にして証明される．[(4) の第1，第3の0は L の0，第2の0は R の0．これを早口でいってごらん．]

3. P. I. D. の上の自由加群

L を環 R 上の加群とする．L の元 $a_1, \cdots, a_n$ があって L の任意の元 x が

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n \qquad (\xi_i \in R) \tag{5}$$

の形に表わされるとき，L は $a_1, \cdots, a_n$ によって**生成される**といい，便宜上

$$L = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle_R \tag{6}$$

とかくことにする．[一般に (5) の右辺のような形の元を $a_1, \cdots, a_n$ の一次結合といい，その全体が作る L の R–部分加群を (6) の右辺の記号で表わす．] さらに (5) の形の表示が一意的である（すなわち x によって係数 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ がただ一通りに決まる）とき，$(a_1, \cdots, a_n)$ は L の**底**であるという．以下考える R–加群はいつでも有限個の生成元をもつ，すなわち (6) の形にかける，と仮定する．特に底をもつような R–加群を**自由** (free) な R–加群という．

以上の定義もベクトル空間の場合の自然な拡張に過ぎない．R が体のときには（有限生成の）R–加群はいつでも底をもつ，すなわち自由であるが，一般の環の場合はそうはいかない．そこでさし当り自由加群だけに着目することにし，次のような定理が成立するかどうかを考えてみよう．

定理 1. L を自由な R–加群とすれば，L の底の元の個数は一定である．（これを L の“階数”といい，$\operatorname{rank} L$ で表わす．）

定理 2.　L を自由な R–加群，M を L の R–部分加群とすれば，M も自由で，$\operatorname{rank} M \leqq \operatorname{rank} L$.

いうまでもなくこれはベクトル空間の“次元”のもつ性質を真似たのである．しかし定理 1, 2 は全く無条件では成立しない．そこでまずこれらが成立するための（R に関する）必要条件を求めてみよう．

そのためにまず R 自身一つの R–加群と考えられることに着目しよう．それは底 (1) をもつ自由な R–加群である．従ってもし定理 1, 2 が成立するとすれば，R の R–部分加群はすべて階数 $\leqq 1$ の自由 R–加群でなければならない．R 自身の R–部分加群は特にイデアルという名でよばれている．すなわち I が R の**イデアル**であるとは次の二つの条件が成立することである：

(i)　I は R の部分加群である，すなわち

$$\xi, \eta \in I \Longrightarrow \xi \pm \eta \in I;$$

(ii)

$$\alpha \in R, \xi \in I \Longrightarrow \alpha\xi \in I.$$

上記の必要条件は，$I \neq \{0\}$ ならば，ある $\alpha_1 \in I$ があって，I の元は $\xi\alpha_1$ の形に一意的に表わされることを意味する．これは更に次の二つの条件（を合せたもの）と同値であることが容易にわかる．

(PI)　R の任意のイデアルは 1 個の生成元をもつ．

(D)　$\alpha, \beta \in R$, $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ とすれば $\alpha\beta \neq 0$.

一般に環 R において，$\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$，かつ $\alpha\beta = 0$ のとき，α, β を“零因子”という．条件 (D) は R に零因子が存在しないことを意味する．この条件をみたす環を**整域** (integral domain) という．一方，1 個の元 α_1 で生成されるイデアルを“単項イデアル”(principal ideal) といい，(α_1) で表わす．それゆえ条件 (PI), (D) をみたす環を**単項イデアル整域** (P. I. D.) というのである．

よく知られているように，$\boldsymbol{Z}$ や $K[x]$ は P. I. D. の典型的な例である．二変数以上の多項式環 $K[x_1, \cdots, x_n]$ は整域ではあるが，P. I. D. ではない．IV で説明した環 $\boldsymbol{Z}[\omega]$ も P. I. D. の一例である．P. I. D. の性質について

は後でまた述べることにし，以下，上記の条件が十分条件でもあること，すなわち R が P. I. D. ならば，定理 1, 2 が成立することを証明しよう．

4. 定理 1 の証明（埋め込み法）

R を P. I. D.，L を自由な R-加群とする．定理 1 の証明法は色々あるが，ここでは L をベクトル空間の中に埋め込んで証明することにする．証明からわかるように条件（D）だけが必要で（PI）の方は不要である．

$S=R-\{0\}$（R から 0 だけ取り除いた集合）とおき，“分数” α/β ($\alpha\in R$, $\beta\in S$) を考える．分数の相等，加法，乗法等を普通通り次のように定義する：

(7)
$$\alpha/\beta=\alpha'/\beta' \iff \beta'\alpha=\beta\alpha',$$

(8)
$$\alpha/\beta+\gamma/\delta=(\delta\alpha+\beta\gamma)/\beta\delta,$$

(9)
$$(\alpha/\beta)\cdot(\gamma/\delta)=\alpha\gamma/\beta\delta.$$

[(7) によって同値関係が定義されること，また (8), (9) の右辺の分母が 0 にならないこと等，条件（D）からの帰結である．] 有理数のときと全く同様に，“分数” 全体がこれらの演算に関して一つの体になることが証明される．［体の条件を一つ一つ検してみればよい．(A1), (A2), (M1), (M2), (AM) 等は定義式 (8), (9) から形式的な計算で確かめられる．任意の $\beta,\beta'\in S$ に対し $0/\beta=0/\beta'$ であり，この元を 0 とおけば (A3) が成立する．また $-(\alpha/\beta)=(-\alpha)/\beta$ とおけば (A4) が成立する等々．大切なことは $\alpha/\beta\neq 0$ とすれば $\alpha\neq 0$，従って β/α が定義され $(\alpha/\beta)^{-1}=\beta/\alpha$ となることである．] この体を $K=S^{-1}R$ で表わし，R の**商体**という．これも有理数のときと同様，$\alpha\in R$ を $\alpha/1$ と一致させて，$R\subset K$ とみなすことができる．そうすれば実際，$\alpha/\beta=(\alpha/1)(\beta/1)^{-1}=\alpha\beta^{-1}$ であるから，α/β は α の β による商になる．

さて上と全く同じ操作により

(10)
$$S^{-1}L=\{\,x/\beta\mid x\in L, \beta\in S\,\}$$

を考え，(8) と同様の式により加法を，(9) と同様の式によりスカラー乗法を定義することができる．実際，$\alpha/\beta\in K$, $x/\delta\in S^{-1}L$ に対し，その積を

$$(\alpha/\beta)\cdot(x/\delta) = \alpha x/\beta\delta$$

によって定義するのである．そうすれば，“容易に” $V=S^{-1}L$ が $K=S^{-1}R$ 上のベクトル空間になることがわかる．（もう一度ベクトル空間の条件を検してみればよい．）更に前と同様，$x\in L$ と $x/1\in V$ とを一致させて $L\subset V$ とみなすことができる．そうすれば L の底 $(a_1,\cdots,a_n)$ が同時に V の（K 上の）底になっていることは直ちにわかる．よって $n=\dim V$．ところが V の構成法は底のとり方に無関係であり，ベクトル空間についてその次元が不変的に定義されることは既知である．よって n は L だけによって定まる．これで定理1が証明された．

（上の証明では x/β の形の分数の相等を(7)と同様に定義できるという所に L が自由 R-加群であることを使った．問題参照．）

5．定理2の証明（ブツ切り法）

R を P. I. D., L を自由な R-加群とし，$(a_1,\cdots,a_n)$ を L の一つの底とする．M を R-部分加群とし，次のようにおく．

(11)　　$L_i=\langle a_1,\cdots,a_i\rangle_R,\qquad M_i=M\cap L_i\qquad (1\leqslant i\leqslant n).$

これらも L の R-部分加群で，明らかに

(12)　　$\{0\}\subset M_1\subset M_2\subset\cdots\subset M_n=M.$

(12) の列において実際に不等号の起こる所，すなわち $M_{i-1}\subsetneqq M_i$ であるような i に着目し，それを（小さい方から順に）$i_1,i_2,\cdots,i_r$ とする．（ただし $M_0=\{0\}$ とおく．）M_{i_k} の元 x は

(13)　　$x=\xi_1a_1+\cdots+\xi_{i_k}a_{i_k}\qquad (\xi_i\in R)$

と一意的に表わされる．この最後の係数 ξ_{i_k} に着目し対応 $\varphi_k: x\longmapsto\xi_{i_k}$ を考える．明らかに

$$x\longmapsto\xi_{i_k},\ \ y\longmapsto\eta_{i_k}$$
$$\Longrightarrow\ \ x+y\longmapsto\xi_{i_k}+\eta_{i_k},\ \ \alpha x\longmapsto\alpha\xi_{i_k}$$

（すなわち，φ_k は R-加群の準同型）であるから，このようにして得られる ξ_{i_k} 全体の集合（すなわち $\varphi_k(M_{i_k})$）は R のイデアルになる．仮定によりそ

れは単項イデアルであるから，その生成元を β_k とし，$\varphi_k(b_k)=\beta_k$ であるとする．ここで β_k は０ではない．もし $\beta_k=0$ ならば，$\varphi_k(M_{i_k})=\{0\}$，従って $M_{i_k}\subset L_{i_k-1}$, $M_{i_k}=M_{i_k-1}$ となって矛盾である．

さて $(b_1,\cdots,b_k)$ が M_{i_k} の底になることを k に関する帰納法で証明しよう．$M_{i_0}=\{0\}$ とおくことにすれば，$k=0$ のときは自明（何も証明することがない）．$k-1$ のとき成立するものと仮定する．$x\in M_{i_k}$, $\varphi_k(x)=\xi_{i_k}$ とすれば，$\xi_{i_k}\in(\beta_k)$ であるから $\xi_{i_k}=\lambda\beta_k\,(\lambda\in R)$ と（一意的に）かける．そのとき

$$\begin{aligned}\varphi_k(x-\lambda b_k)&=\varphi_k(x)-\lambda\varphi_k(b_k)\\&=\xi_{i_k}-\lambda\beta_k=0.\end{aligned}$$

よって $x-\lambda b_k\in M_{i_k-1}=M_{i_{k-1}}$．帰納法の仮定により $M_{i_{k-1}}=\langle b_1,\cdots,b_{k-1}\rangle_R$ であるから，$x-\lambda b_k$ は $b_1,\cdots,b_{k-1}$ の（R の元を係数とする）一次結合として（一意的に）表わされる．よって x は $b_1,\cdots,b_k$ の一次結合として表わされる．この表示が一意的であることも上記により明らかであろう．これで帰納法が完成した．$k=n$ の場合が定理２である．（証終）

上の証明において

(14)　$$b_k=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ik}a_i\qquad(\lambda_{ik}\in R)$$

とおけば，定義により

(15)　$$\lambda_{i_kk}=\beta_k,\qquad\lambda_{ik}=0\quad(i>i_k).$$

従って“底の変換”$(a_i)\to(b_i)$ の行列 (λ_{ik})（(n,r)-行列）はタテに押しつぶした形の三角行列になっている．われわれの目標としているアーベル群の基本定理やジョルダン標準形を出すためには定理２では不十分で，L と M の底をとり直してこの行列 (λ_{ik}) が対角形になるようにする必要がある．しかし，そのためには更に準備が要るので次回（VII）にまわすことにしよう．

6. P. I. D. の性質

ここで P. I. D. の主な性質をまとめておこう．大体有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ や多項式環 $K[x]$ の基本的な性質がそのまま成立するのである．

R を P. I. D. とし，$\alpha, \beta, \cdots \in R$ とする．β が α の "約数" であるとき，すなわち $\alpha = \lambda\beta$ となる $\lambda \in R$ が存在するとき，$\beta \mid \alpha$ とかく．この条件をイデアルにほんやくすれば

(16)　$$\beta \mid \alpha \Longleftrightarrow \alpha \in (\beta) \Longleftrightarrow (\alpha) \subset (\beta).$$

特に 1 の "約数"，すなわち R において（乗法的）逆元をもつような元 ε を R の**単数** (unit) という．R の単数全体の集合は乗法に関して可換群を作る．それを $R^\times$ で表わす．

例：　$\boldsymbol{Z}^\times = \{\pm 1\}$,　$\boldsymbol{Z}[\omega]^\times = \{\pm 1, \pm\omega, \pm\omega^2\}$,

K を任意の体とすれば，$K[x]^\times = K^\times = K - \{0\}$.

明らかに

$$(\alpha) = (\beta) \Longleftrightarrow \alpha = \varepsilon\beta,\ \ \varepsilon \in R^\times,$$

すなわち，単項イデアルの生成元は単数を除いて定まる．$\alpha, \beta \in R$ の間に上記の関係があるとき $\alpha \sim \beta$ とかくことにする．

$\alpha, \beta \in R - \{0\}$ に対し

(17)　$$(\alpha) \cap (\beta) = (\gamma),$$
$$(\alpha) + (\beta) = \{\, \xi\alpha + \eta\beta \mid \xi, \eta \in R \,\} = (\delta)$$

によって（単数を除いて）定まる元 γ, δ を α, β の "最小公倍数"，"最大公約数" という．（この定義が正当である理由を考えてみよ．）これに関して

(18)　$$\gamma\delta \sim \alpha\beta$$

が成立する．その証明：α, β をそれぞれ α/δ, β/δ でおきかえれば，$\delta = 1$ の場合に帰着する．よって

(19)　$$(\alpha) + (\beta) = R \Longrightarrow (\alpha) \cap (\beta) = (\alpha\beta)$$

を証明すれば十分．仮定によりある $\lambda, \mu \in R$ があって

$$\lambda\alpha + \mu\beta = 1$$

が成立する．今，$\xi \in (\alpha) \cap (\beta)$ とすれば

$$\xi = \lambda\alpha\xi + \mu\beta\xi.$$

$\xi \in (\beta)$ であるから，$\alpha\xi \in (\alpha\beta)$．また $\xi \in (\alpha)$ であるから $\beta\xi \in (\alpha\beta)$．よって上式から $\xi \in (\alpha\beta)$ を得る．従って $(\alpha)\cap(\beta) \subset (\alpha\beta)$．逆の包含関係は自明である．

$(\alpha)+(\beta) = R$ であるとき，α, β は"互に素である"という．

R の（単数ではない）元 π が 1 とそれ自身の他に本質的な約数をもたないとき，すなわち

$$\alpha \mid \pi \Longrightarrow \alpha \sim 1 \text{ または } \alpha \sim \pi \tag{20}$$

であるとき，**素元**（prime element）という．π が素元であるためには (π) が"極大イデアル"（すなわちそれを真に含むイデアルは R しかない）であることが必要十分である．

さて一般の P. I. D. においても素元分解定理が成立する．

定理 3. R を P. I. D. とすれば，R の 0 でない任意の元 α は

$$\alpha = \varepsilon\pi_1{}^{m_1}\cdots\pi_r{}^{m_r} \qquad (\varepsilon \in R^\times,\ \pi_i \text{ は素元},\ m_i \text{ は自然数})$$

の形に分解される．しかもこのような分解は積の順序を除き本質的に一意的である．（本質的とは，ε, π_i 等を同値な元でおきかえる操作を除いてということである．）

証明もそう難しくはないが，ここでは省略し，P. I. D. でいわゆる"約鎖律"（ascending chain condition）が成立し，定理 3 はそれを使って証明されるということだけ注意しておこう†)．

問題． R を P. I. D.，L を有限生成の R-加群とし

$$L^0 = \{\, x \in L \mid \gamma x = 0 \text{ for some } \gamma \in R - \{0\} \,\}$$

とおけば，L^0 は L の R-部分加群である．L に関して次の三つの条件が互に同値であることを証明せよ．

（i）L は自由，

---

†) 証明は例えば 彌永・小平，現代数学概説 I，岩波，p. 356，または S. Lang, Algebra, Addison-Wesley Publ., II, §4 参照．

(ii)　$L^0 = \{0\}$,

(iii)　L は R の商体 $K = S^{-1}R$ 上のあるベクトル空間 V の中に（演算を含めて）埋め込める．

［ヒント：(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(i) の順に証明するとよい．(i)⇒(ii) は何でもない．(ii)⇒(iii) は定理 1 の証明と同様 $V = S^{-1}L$ に埋め込めばよい．"分数" x/β の相等を (7) と同様に定義したとき，それが同値律をみたすという所に (ii) を使う．(iii)⇒(i) をいうには，V の任意の底 $(a_1, \cdots, a_n)$ をとり，ある $\gamma \in S$ に対して

$$L \subset \langle \gamma^{-1}a_1, \cdots, \gamma^{-1}a_n \rangle_R$$

が成立することをいい，定理 2 を適用する．］

VII

アーベル群の基本定理とジョルダン標準形

今回は（前回に続いて）大定理(？)をいくつか説明しなければならないので少々忙しい．無駄口は止めて早速その準備にとりかかろう．

1. 商加群と直和

R を P. I. D.（単項イデアル整域），すなわち単位元1をもつ可換環で，零因子がなく，しかもすべてのイデアルが1個の生成元をもつようなものとする．前回説明したようにこのような環は線形代数をやる上に体の次に扱い易いものである．

さて L を任意の R-加群，N をその R-部分加群とする．$x, x' \in L$ に対し

$$x \equiv x' \pmod N \iff x'-x \in N$$

によって合同関係 $\equiv \pmod N$ を定義すれば，これが一つの同値関係になることは直ちにわかる．x の属する同値類をその“剰余類”（residue class または coset）といい，仮に $[x]_N$ とかくことにしよう．容易にわかるように

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv x',\ y \equiv y' \pmod N \\ \alpha \in R \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y \equiv x'+y' \pmod N, \\ \alpha x \equiv \alpha x' \pmod N \end{array}\right.$$

であるから，剰余類の間の演算を

(1) $$[x]_N+[y]_N = [x+y]_N,$$

(2) $$\alpha[x]_N = [\alpha x]_N$$

によって定義することができる．（すなわち (1), (2) の右辺はいずれも代表 x, y のとり方に関係なく，剰余類 $[x]_N, [y]_N$ だけによって一意的に定まる

のである.）剰余類 $[x]_N$ $(x \in L)$ 全体の集合はこの演算に関して一つの R-加群になる．これを**商加群**といい，L/N で表わす．（これは有理整数環 $\boldsymbol{Z}$ を modulo p で考えて有限体 $\boldsymbol{F}_p$ を作ったのと全く同じ操作である.）

次に，二つの R-加群 M_1, M_2 が与えられたとき，その"積集合"

$$M = M_1 \times M_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in M_1,\ x_2 \in M_2\}$$

を考える．M における演算を数ベクトルのときと同じように

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2), \tag{3}$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \tag{4}$$

によって定義すれば，M はまた一つの R-加群になる．（この証明も数ベクトル空間がベクトル空間の条件をみたすことの証明と全く同じである.）M を R-加群 M_1, M_2 の**直和**といい，$M = M_1 \oplus M_2$ とかく．今

$$M_1' = \{(x_1, 0) \mid x_1 \in M_1\},$$

$$M_2' = \{(0, x_2) \mid x_2 \in M_2\}$$

とおけば，対応 $x_1 \longleftrightarrow (x_1, 0)$，$x_2 \longleftrightarrow (0, x_2)$ により，M_1 と M_1', M_2 と M_2' は（R-加群として）"同型"になる：$M_1 \cong M_1'$, $M_2 \cong M_2'$．従って M_1 と M_1', M_2 と M_2' を同一視して，M_1, M_2 を M の R-部分加群と考えることが多い．そうすれば

$$M = M_1 + M_2, \qquad M_1 \cap M_2 = \{0\} \tag{5}$$

となり，M は二つの R-部分加群 M_1 と M_2 の直和に分解される．（これらもベクトル空間の直和の構成，および直和分解と全く同じ考え方である.）

例えば L を階数 n の自由な R-加群，$(a_1, \cdots, a_n)$ をその一つの底とすれば

$$L = \langle a_1 \rangle_R \oplus \cdots \oplus \langle a_n \rangle_R.$$

ここに $\langle a_i \rangle_R$ は a_i によって生成される L の R-部分加群を表わす．明らかに R-加群として $\langle a_i \rangle_R \cong R$ であるから

$$L \cong \overbrace{R \oplus \cdots \oplus R}^{n}. \tag{6}$$

2. 巡回加群，ねじれ加群

M を有限個の生成元をもつ（必ずしも自由でない）R-加群とする．$x \in M$ に対し

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Ann} x = \{ \lambda \in R \mid \lambda x = 0 \}$$

とおけば，明らかに $\operatorname{Ann} x$ は R のイデアルになる．(Ann は Annihilator の略である．) $\operatorname{Ann} x = (0)$ のとき x を**自由**な元，$\operatorname{Ann} x \neq (0)$ のとき，(適当な言葉がないので仮に)“不自由な元”ということにする．x が自由ならば，上に述べたように，$\langle x \rangle_R \cong R$ であるが，x が不自由ならば $\operatorname{Ann} x = (\alpha)$ $(\alpha \neq 0)$ とするとき，対応

$$\lambda x \longleftrightarrow \lambda \, (\operatorname{mod} (\alpha))$$

により，$\langle x \rangle_R \cong R/(\alpha)$ である†)．1個の元で生成される R-加群を**巡回的** (cyclic) という．巡回的 R-加群は R または $R/(\alpha)$ に同型であることがわかった．

ここで $\alpha (\neq 0)$ が $\alpha = \beta\gamma$ と分解され，β と γ が“互に素”(すなわち β, γ の G.C.D が 1) ならば

$$\text{(8)} \qquad R/(\alpha) \cong R/(\beta) \oplus R/(\gamma)$$

という関係が成立する．これは“上記の仮定の下に任意の $\xi_1, \xi_2 \in R$ に対し

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \xi \equiv \xi_1 \quad (\operatorname{mod}(\beta)) \\ \xi \equiv \xi_2 \quad (\operatorname{mod}(\gamma)) \end{cases}$$

をみたす $\xi (\in R)$ が $\operatorname{mod} (\alpha)$ で唯一つ定まる”という (“Chinese Remainder Theorem” という余り感じの良くない名で呼ばれている) 定理から直ちに導かれる．[β, γ が互に素ならば $\lambda\beta + \mu\gamma = 1$ となるような $\lambda, \mu \in R$ が存在する．そのとき (9) の解は $\xi \equiv \xi_2 \lambda\beta + \xi_1 \mu\gamma \, (\operatorname{mod} (\alpha))$ によって与えられる．]

さて一般の R-加群 M に戻り，M の不自由な元全体の集合を M^0 で表

---

†) この場合，$R/(\alpha)$ は環の構造をもつ．しかしわれわれは R 自身を一つの R-加群，イデアル (α) をその R-部分加群とみて商加群 $R/(\alpha)$ を作るのである．従って，$R/(\alpha)$ も一つの R-加群とみなす．

わす．そのとき次の補題が成立する：

補題 1. M^0 は M の R–部分加群で，M に関する次の三つの条件は互に同値である：

（i） M は自由；

（ii） $M^0=\{0\}$；

(iii) R の商体を K とすれば，M は K 上の（有限次元）ベクトル空間の中に（R–加群として）埋め込まれる．

(これは前回問題として出しておいた．その解答参照．)

一般の場合，$\overline{M}=M/M^0$ とおけば，定義から明らかに $(\overline{M})^0=\{0\}$ である．従って補題1により $\overline{M}$ は自由である．よって M の階数 (rank) を $\overline{M}$ のそれによって定義することにする：$\operatorname{rank} M \overset{\text{def}}{=} \operatorname{rank} \overline{M}$．特に $\operatorname{rank} M=0$，すなわち $M=M^0$ のとき，M を**ねじれ加群** (torsion module) という．(妙な言葉だがトポロジーから来た術語である．) 一般の場合 M^0 を M の“ねじれ部分”という．

3. 基本定理

われわれの目標としてきた基本定理は次のように述べることができる．

定理 1. R を P. I. D.，L を階数 n の自由 R–加群，N を L の R–部分加群とする． そのとき，L の底 $(a_1',\cdots,a_n')$, $\lambda_i\in R\,(1\leqslant i\leqslant r)$ を適当にえらべば $(\lambda_1a_1',\cdots,\lambda_ra_r')$ が N の底になる．ここで更に条件

(10) $$\lambda_i \mid \lambda_{i+1}{}^{\dagger)} \qquad (1\leqslant i\leqslant r-1)$$

が成立するように a_i',λ_i をえらぶことができる．条件 (10) の下にイデアルの列 (λ_i) $(1\leqslant i\leqslant r)$ は L,N だけによって一意的に定まる．

この定理から直ちに一般の（有限生成）R–加群の構造定理が導かれる．今，$M=\langle b_1,\cdots,b_n\rangle_R$ とし，補助として階数 n の自由 R–加群 $L=\langle a_1,\cdots,a_n\rangle_R$ を用意する．$L\ni x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ia_i$ $(\xi_i\in R)$ に対し

---

†) $\lambda_i|\lambda_{i+1}$ は R において λ_i が λ_{i+1} の“約数”であることを示す．イデアルの記号でいえば $(\lambda_i)\supset(\lambda_{i+1})$ である．

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i b_i \in M$$

とおくことにより写像 $\varphi\colon L \longrightarrow M$ が定義される．この写像は明らかに線形写像と類似の条件

$$\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y),$$
$$\varphi(\alpha x)=\alpha\varphi(x)$$

を満足する．（抽象代数の言葉でいえば，φ は R-加群の準同型である．）従って

$$N=\{\,x \in L \mid \varphi(x)=0\,\}$$

とおけば，N は L の R-部分加群で，容易にわかるように自然な対応

$$[x]_N \longmapsto \varphi(x)$$

により，$L/N \cong M$ である．（R-加群の準同型定理）

さて定理 1 をこの L, N に適用すれば，ある底 (a_i')，および $\lambda_i \in R$ があって

$$\text{(11)}\qquad \begin{aligned} L &= \langle a_1'\rangle_R \oplus \cdots \oplus \langle a_n'\rangle_R,\\ N &= \langle \lambda_1 a_1'\rangle_R \oplus \cdots \oplus \langle \lambda_r a_r'\rangle_R \end{aligned}$$

となる．よって

$$\text{(12)}\qquad M \cong L/N \cong R/(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus R/(\lambda_r) \oplus \overbrace{R \oplus \cdots \oplus R}^{n-r}.$$

すなわち

定理 2. P. I. D. の上の任意の有限生成加群はいくつかの巡回加群の直和として表わされる．

(12) から明らかに

$$\text{(13)}\qquad M^0 \cong R/(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus R/(\lambda_r),$$

従って $\operatorname{rank} M = n-r$ である．更に条件 (10)，すなわち

$$\text{(14)}\qquad (\lambda_1) \supset (\lambda_2) \supset \cdots \supset (\lambda_r)$$

が成立するものとすれば，イデアル列 (λ_i) も一意的に定まる†)．一般には (λ_i) のうち最初のいくつかは $=R$ となり得るが，(12) の分解においてそ

†) 実際にはこの一意性から定理 1 のそれを導く．

のような (λ_i) に対応する項は $R/(\lambda_i)=\{0\}$ となるから省略してよい．"(λ_i) が一意的" というのは このような余計な (λ_i) を除いた残りが一意的ということである．初めに M の生成元 $b_1, \cdots, b_n$ をその個数が最小になるようにとっておけば，余計な (λ_i) はでてこない．

さらに R における素元分解定理を使って

$$\lambda_i = \varepsilon_i \prod_{j=1}^{s} \pi_j{}^{\nu_{ij}} \qquad (\varepsilon_i \text{ は単数，} \pi_j \text{ は素元})$$

とすれば，(8) により

$$R/(\lambda_i) \cong R/(\pi_1{}^{\nu_{i1}}) \oplus \cdots \oplus R/(\pi_s{}^{\nu_{is}}),$$

よって (13) から

$$M^0 \cong \bigoplus_{i,j} R/(\pi_j{}^{\nu_{ij}}) \tag{15}$$

を得る．条件 (14) は

$$\nu_{1j} \leqslant \nu_{2j} \leqslant \cdots \leqslant \nu_{rj} \qquad (1 \leqslant j \leqslant s) \tag{16}$$

と同値である．従って指数の列 ν_{ij} は（0の部分およびその配列の順序を除き）一意的に定まる．

定理2の特別な場合としてアーベル群の基本定理がでる．A をアーベル群（すなわち可換群）とし，その演算を加法の形にかく．正の整数 m に対し

$$mx = \overbrace{x+\cdots+x}^{m} \qquad (x \in A)$$

とおき，$m \leqslant 0$ のときには

$$mx = \begin{cases} 0 & (m=0) \\ -|m|x & (m<0) \end{cases}$$

と定義すれば，このスカラー乗法に関して A は $\boldsymbol{Z}$-加群になる．この意味で $x \in A^0$ (A のねじれ部分), $\mathrm{Ann}\, x = (m)$, $m>0$ とすれば，m は x の（あるいは巡回群 $\langle x \rangle_{\boldsymbol{Z}}$ の）"位数" に他ならない．よって A が有限生成のアーベル群であるとき，それを $\boldsymbol{Z}$-加群とみなして，定理2を適用すれば，A が（普通の意味の）巡回群の直積に分解されることがわかる．上に述べたことからより精密に，A を自由巡回群および位数が素数巾の巡回群いくつか

の直積に分解することができ，そのような分解は本質的に一意的である．これが**アーベル群の基本定理**である．この場合，A^0 は A に含まれる最大の有限部分群になる．

4. 基本定理の証明

L を階数 n の自由 R-加群とする．補題1により L は R の商体 K の上のベクトル空間 V の中に（演算もこめて）埋め込まれているものと仮定してよい．

まず一般に次の問題を考える．L の R-部分加群 L_1 はどんな条件の下に L の直和因子になるか？　すなわち L を $L=L_1 \oplus L_2$ の形に R-部分加群の直和に分解することできるか？　これについては次の補題が成立する．

補題 2.　自由 R-加群 L の R-部分加群 L_1 に関して次の三つの条件は互に同値である：

（i）　L_1 は L の直和因子になる；

（ii）　L/L_1 は自由；

（iii）　L_1 によって生成される V の部分空間を $V_1=KL_1$ とすれば，$L_1 = L \cap V_1$．

証明は難しくはないから読者の演習問題にしよう．(i)⇒(iii)⇒(ii)⇒(i) の順にやるとよい．((iii)⇒(ii) に補題1を使う．)

特に $L_1 = \langle x \rangle_R$ $(x \in L,\ x \neq 0)$ の場合，条件（iii）は

$$\alpha \in K,\ \alpha x \in L \Longrightarrow \alpha \in R \tag{17}$$

となる．この条件をみたす x を L の“原始元”(primitive element) という．よって補題2をこの場合に適用すれば，$\langle x \rangle_R$ が L の直和因子になるためには x が原始元であることが必要十分であることがわかる．

次に $x \in V$ に対して

$$(L:x) = \{\, \lambda \in K \mid \lambda x \in L \,\} \tag{18}$$

とおく．$(L:x)$ は明らかに K の R-部分加群で，$x=0$ なら $(L:0)=K$，また $x \notin KL$ なら $(L:x)=\{0\}$ である．$x \in KL$, $x \neq 0$ のとき，(a_i) を

L の底とし，$x = \sum \xi_i a_i$ とおけば，ある $\xi_{i_1} \neq 0$.

$$\lambda \in (L : x) \Longrightarrow \lambda x = \sum \lambda \xi_i a_i \in L \Longrightarrow \lambda \xi_{i_1} \in R$$

であるから，$\xi_{i_1} \cdot (L : x)$ は R の R-部分加群，すなわちイデアルになる．よってそれを (γ) とすれば，$(L : x)$ は γ/ξ_{i_1} の“倍数”全体の集合になる．それを (γ/ξ_{i_1}) で表わす．このような“分数イデアル”についても，本来の R の（整）イデアルと同様のとり扱いをすることができる．

補題 3.　(a)　$\alpha \in K,\ \alpha \neq 0$ とすれば

(19)
$$(L : \alpha x) = (\alpha^{-1}) \cdot (L : x).$$

(b)　$x \in L \Longleftrightarrow (L : x) \supset R.$

(c)　x は L の原始元 $\Longleftrightarrow (L : x) = R.$

(d)　任意の $x, y \in V$ に対し，ある $z \in \langle x, y \rangle_R$ があって

(20)
$$(L : z) = (L : x) \cap (L : y).$$

(a)～(c) はいずれも trivial. (d) の証明のヒントだけ与えておこう．$(L : x) = (\alpha)$, $(L : y) = (\beta)$ $(\alpha, \beta \neq 0)$ であるとし，$(\alpha) + (\beta) = (\delta)$ とすれば，ある $\lambda, \mu \in R$ があって $\lambda\alpha + \mu\beta = \delta$. そのとき $z = \mu x + \lambda y$ とおけば，$(L : z) = (\alpha\beta\delta^{-1}) = (\alpha) \cap (\beta)$ となる．

(d) から帰納法により，一般に $x_1, \cdots, x_r \in V$ に対し，ある $z \in \langle x_1, \cdots, x_r \rangle_R$ があって

$$(L : z) = \bigcap_{i=1}^{r} (L : x_i)$$

となることがいえる．

さて，いよいよ定理1の証明に入ろう．補題2により $L \cap KN$ は L の直和因子になり，$N \subset L \cap KN$ であるから，定理を $L \cap KN$ と N に関して証明すれば十分である．すなわち $V = KL = KN$ として証明すればよい．（この仮定は $\dim V = \operatorname{rank} L = \operatorname{rank} N$ と同値.）$n = \operatorname{rank} L$ に関する帰納法を用いる．

$L = \langle a_1, \cdots, a_n \rangle_R$ とし

$$(N : L) = \{\, \xi \in K \mid \xi L \subset N \}$$

とおけば，明らかに

(21) $$(N:L)=\bigcap_{i=1}^{n}(N:a_i).$$

これは R の（整）イデアルであるから $(N:L)=(\lambda_n)$ とおく．補題3(d)（の拡張）により，ある $a_n'\in L$ があって

(22) $$(N:a_n')=(N:L)=(\lambda_n)$$

となる．そのとき $(N:\lambda_n a_n')=R$ となるから $\lambda_n a_n'$ は N の原始元である（補題3 (a),(c)）．よって補題2の後に述べたことにより，N の R-部分加群 N_1 があって

(23) $$N=N_1\oplus\langle\lambda_n a_n'\rangle_R$$

と直和分解される．$V_1=KN_1$ とおけば，(23) に対応してベクトル空間 V も

(24) $$V=V_1\oplus Ka_n'$$

と直和分解される．今，$x\in L$ とし，分解 (24) に即して

(25) $$x=x_1+\xi a_n',\quad x_1\in V_1,\ \xi\in K$$

とかけば

$$\lambda_n x=\lambda_n x_1+\lambda_n\xi a_n'\in N.$$

よって (23) から $\lambda_n x_1\in N_1, \xi\in R$.（これは a_n' が L の原始元であることを示す.）よって (25) から，$x_1\in L\wedge V_1$ を得る．従って $L_1=L\wedge V_1$ とおけば

(26) $$L=L_1\oplus\langle a_n'\rangle_R$$

と直和分解されることがわかった．同時に $(N_1:L_1)=(\lambda_{n-1})$ とすれば，$\lambda_{n-1}\mid\lambda_n$ であることもわかる．よって帰納法の仮定を L_1 と N_1 に適用すれば定理1の結果が（一意性の部分を除いて）得られる．

定理1,2における一意性も同じような論法で帰納的に証明されるが，ここでは省略させて頂く．

5. ジョルダン標準形

最後に定理２からジョルダン標準形の定理を導いてみよう．

$R=C[x]$ を複素数体 C の上の一変数多項式環とする．よく知られているように $C[x]$ は P. I. D. で，その素元は C 上の既約多項式，すなわち一次式 $x-\alpha$（およびその定数倍）によって与えられる．

さて C 上の n 次元ベクトル空間 V の一つの一次変換 φ が与えられたとする．そのとき次のようにして V を $C[x]$-加群にすることができる．$v\in V$ に対し

$$x\cdot v=\varphi(v)$$

とおき，この作用を自然に $C[x]$ に拡張するのである．すなわち $f(x)=\sum\alpha_i x^i$ に対しては

$$f(x)\cdot v=\sum\alpha_i\varphi^i(v) \tag{27}$$

とおく．ここに φ^i は φ を i 回くり返しほどこして得られる一次変換を表わす．よく知られているように，$f(x)$ を特に一次変換 φ の“特性多項式”（または最小多項式）とすれば，すべての $v\in V$ に対して $f(x)\cdot v=0$ である（Hamilton-Cayley の定理）．よって V は $C[x]$-加群としては“ねじれ加群”である．（C-加群としてはもちろん自由であるが．）よって定理２により V は“ねじれ巡回加群”の直和に分解される．より精密に（15）により V は

$$W_{ij}\cong C[x]/((x-\alpha_j)^{\nu_{ij}}) \tag{28}$$

の形の巡回加群の直和になる．W_{ij} は φ に関して不変な部分空間である．今，W_{ij} の $C[x]$-加群としての生成元 w_0 をとり

$$w_k=(x-\alpha_j)^k w_0 \qquad (k=0,1,\cdots) \tag{29}$$

とおけば，(28) からわかるように $(w_0, w_1, \cdots, w_{\nu_{ij}-1})$ が W_{ij} の C 上の底になる；従って $\dim W_{ij}=\nu_{ij}$．この底に関して $\varphi|W_{ij}$（φ の W_{ij} への制限）を行列表示すれば

$$(30)\qquad (\varphi(w_0), \cdots, \varphi(w_{\nu_{ij}-1})) = (w_0, \cdots, w_{\nu_{ij}-1}) \begin{pmatrix} \alpha_j & & & & 0 \\ 1 & \alpha_j & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & \alpha_j \end{pmatrix}.$$

よってこれらの底を並べて得られる V の底に関する φ の行列は上記のような行列を対角線に沿って並べたものになる．これが φ の行列の**ジョルダン標準形**である．上の操作からわかるように α_j は φ の“固有値”であり，ν_{ij} も φ の不変量として一意的に定まる．すなわちジョルダン標準形は φ に対して（本質的に）唯一つ定まるのである．

*　　*　　*

（B君は先程から気持ち良さそうに眠っている．）

A「今日の話はこれでおしまいだ．おや，お前まさか眠ってしまったのではあるまいね．」

B（あわてて眼をさまし）「い，いいえ，謹聴しておりましたよ．何だか補題が沢山でてきて，あまり“手っ取り早く”はなかったようでしたが．」

A「うむ．ジョルダン標準形を出すだけならば直接やった方が早いかもしれない．しかし抽象代数的手法の方が証明の骨組みがはっきりして気持がよい．」

B「それにアーベル群の基本定理とジョルダン標準形と全然関係のないような二つの定理が同一の原理から出てくる所が面白かったですね．（やっとうまくごまかしたぞ．）」

A「それが抽象化の効力というものだ．今日の話はほんの一例に過ぎないが，現代数学にはそういう例は無数にある！」

B「ではおじさん，大分おそくなったようですから今日はこれで失礼します．お話しをどうも有難う．おやすみなさい．」

A　「じゃ，おやすみ.」

問題.　補題2を証明せよ.

付録

G. A. マルグリス
(不連続群の話)



1. Gregory A. Margulis (Г. А. Маргулис) は1978年 Helsinki の Congress で Fields 賞を受けた4人の数学者の一人である. 正確には「受賞する筈」だった一人である. こういう会議でいつも起ることなのだが, 彼は招待されたにも拘らず, ソ連からの出国が許されず, 折角の受賞式にも出席できなかった. メダルは多分知人の一人によって伝達されたのであろう. どこの国にも, またいつの時代にも, 権力と結びついて得をしている(有能または無能な)学者がいる一方, その逆で損をしている人もいるものである. しかし現在のソ連の状態は極端であり, 非常に憂慮すべきもののようである.

2. Margulis の受賞の対象となったのはいわゆる "Selberg 予想" の解決である. 大雑把にいえば, それはリー群の不連続部分群を決定する問題である. その説明をするために, まず簡単な場合としてユークリッド平面の平行移動の群 G ($\cong \boldsymbol{R}^2$) を考えてみよう. $\boldsymbol{R}^2$ の任意の零でないベクトル $\boldsymbol{a}$ をとり平行移動 $x \longmapsto x+a$ から生成される群, すなわち $\Gamma = \{ x \longmapsto x+ma \ (m \in \boldsymbol{Z}) \}$ をとれば, これは一つの不連続群である. ("不連続" とは Γ が G の中に集積点をもたないことをいう.) さらに一次独立な二つのベクトル a_1, a_2 をとって, 二つの平行移動 $x \longmapsto x+a_i$ ($i=1,2$) から生成される群

$$\Gamma = \{ x \longmapsto x+m_1a_1+m_2a_2 \ (m_1, m_2 \in \boldsymbol{Z}) \}$$

をとっても不連続群が得られる．（しかし三つ以上の平行移動から生成される群は一般に不連続ではない！）この第二の群の“基本領域”がベクトル a_1, a_2 を二辺とする平行四辺形で与えられることは周知であろう(図1)．従ってこの不連続群（lattice ともいう）は本質的に一次独立な二つのベクトルの組 $\{a_1, a_2\}$ で決定され，その選択には連続の（正確には4次元の）自由度があるのである．

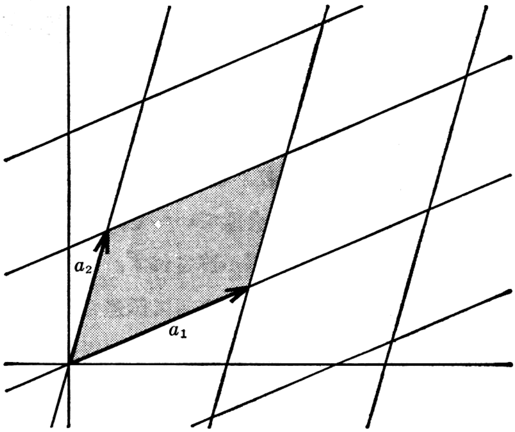


図 1

3. さて問題はこのような不連続群を非可換な群，特に半単純リー群の中で求めようというものである．このような群の代表的な例は n 次の実正方行列 $a=(a_{ij})$ で行列式が1に等しいもの全体の作る群である．それを普通 $SL_n(\boldsymbol{R})$ とかく．

$$G = SL_n(\boldsymbol{R})$$
$$= \{ a = (a_{ij})\ (1 \leqslant i, j \leqslant n) \mid \det(a) = 1 \}.$$

この群の中には明らかに一つの不連続群が入っている．それは行列成分 a_{ij} を整数に制限して得られる部分群

$$\Gamma = SL_n(\boldsymbol{Z}) = \{ a = (a_{ij}) \in SL_n(\boldsymbol{R}) \mid a_{ij} \in \boldsymbol{Z} \}$$

で，**モジュラー群**と呼ばれるものである．しかしこの他にどんな不連続群が

あるだろうか？　それは 2 の場合とは比較にならない難しい問題である．以下その研究の歴史を簡単にたどってみることにしよう．

まず $n=2$ の場合，この問題は 19 世紀までさかのぼる．一変数関数論を学ばれた読者は，上半平面

$$H=\{z=x+iy\in \boldsymbol{C} \mid y>0\}$$

が果す重要な役割を知っておられるであろう．すなわち，複素平面 $\boldsymbol{C}$ の中の単連結領域で全平面 $\boldsymbol{C}$ と一致しないものはすべて上半平面 H と同値になる（1 対 1 解析的に写像される）；そして H の自分自身への解析変換は $G=SL_2(\boldsymbol{R})$ の元による一次分数変換

$$z \longmapsto \frac{a_{11}z+a_{12}}{a_{21}z+a_{22}} \qquad (a=(a_{ij})\in SL_2(\boldsymbol{R})) \tag{1}$$

で与えられる．従って G の中の不連続群 Γ があれば，Γ の変換で互に移り得る点を一致させることにより，商空間 $M=\Gamma\backslash H$ としていわゆる Riemann 面を作ることができる．特に Γ がコンパクトな基本領域をもつならば，M は閉じた（コンパクトな）Riemann 面である．（2 で述べた群からも同様の操作でトーラスができる．）逆に閉 Riemann 面 M の "種数" が $\geqslant 2$ ならば，その単連結被覆空間は H で与えられ，従ってその "基本群"（ホモトピー群）Γ は $G=SL_2(\boldsymbol{R})$（正確にはその商群 $PL_2(\boldsymbol{R})=SL_2(\boldsymbol{R})/\{\pm 1_2\}$）の不連続部分群とみなされ，$M=\Gamma\backslash H$ と表わされる．このように，コンパクトな基本領域をもつ不連続群 $\Gamma\subset SL_2(\boldsymbol{R})$ を求める問題は閉 Riemann 面 M を決めることと本質的に同じなのである．また $M=\Gamma\backslash H$ 上の解析関数は H 上の Γ-不変な関数，すなわち "保型関数" と同じものである．これが前世紀末に Poincaré, Klein 等によって展開された保型関数論の出発点であった．

4. さて上半平面 H はよく知られているように，負の曲率をもつ非ユークリッド平面の一つのモデルである．すなわち，H の中の曲線 $z=z(t)=x(t)+iy(t)$ $(t_0\leqslant t\leqslant t_1)$ に対してその長さを

$$s=\int_{t_0}^{t_1}\frac{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}{y(t)}dt$$

によって定義すれば，負の定曲率 Riemann 空間となる．（これを普通 "Poincaré 平面" という．ロシヤ人は Lobačevckiĭ 平面という．）ここで "直線"（測地線）は実数軸と直交する円弧である．また Poincaré 平面の合同変換は (1) の形の一次分数変換（ただし $\det(a)=\pm 1$）で与えられる．そこで今このような円弧で囲まれた "三角形" ABC を作れば，よく知られているように

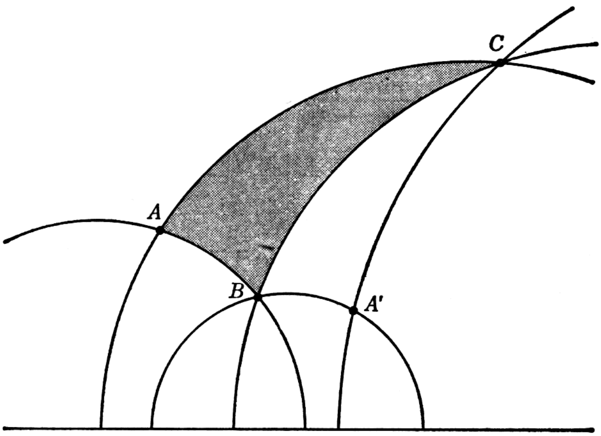


図 2

$$\angle A+\angle B+\angle C<180°$$

であるが，ABC を適当にとればさらに $\angle A, \angle B, \angle C$ をすべて 180° の約数にすることができる．例えば

$$\angle A=60°, \qquad \angle B=45°, \qquad \angle C=36°.$$

今このような "三角形" ABC をその一辺，例えば BC にそって裏返し，そうしてできた三角形 $A'BC$ をさらにその一辺にそって裏返しというように次々と同じ操作をくり返して行けば，上半平面全体をこれら合同な三角形で埋めつくすことができるであろう．そして初めの三角形 ABC をこれら合同な三角形の一つに写すような合同変換全体は明らかに一つの不連続群 Γ' を

作る．特に $\det(a)=1$ であるものだけに限れば，Γ' の（指数２の）部分群 Γ が得られ，$\Gamma\subset SL_2(\boldsymbol{R})$ となる．この Γ の基本領域は二つの隣接する三角形の和集合（例えば $ABA'C$）で与えられる．三角形のかわりに適当な条件をみたす多角形から出発しても同様の結果が得られる．一般にこのようにして得られる不連続群を**鏡影群**（reflection group，または Coxeter group）という．［1978 ICM のマーク（図３）は上記と類似の円の三角形分割を示している．またここにかかげた Escher の図版（図３′）はそれをさらに模様化



図３

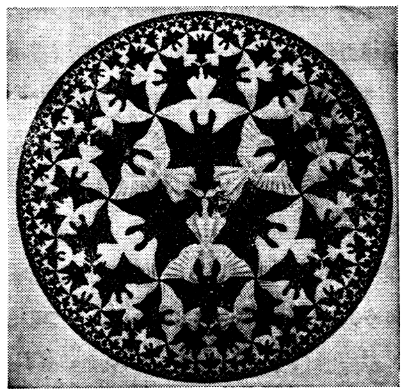


図 3′ M. C. ESCHER : "CIRCLE LIMIT IV"
© by S.P.A.D.E.M., Paris, 1982

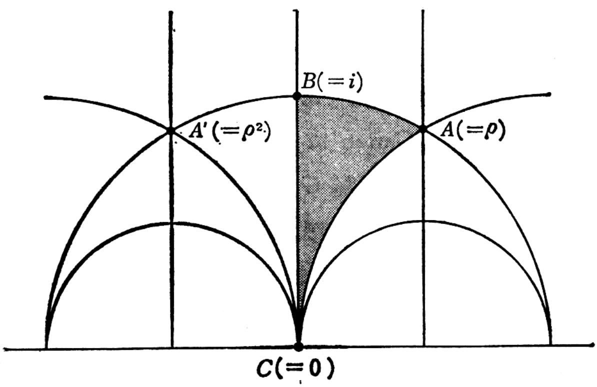


図 4

したものである.］

前に述べたモジュラー群 $\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ も鏡影群の一つであるが，この場合には三点 $0, i, \rho\left(=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}\,i)\right)$ を頂点とする三角形から出発するのである（図4）．従って $AA'C$ がその基本領域で $\Gamma\backslash H$ はその合同な二辺（AB と $A'B$，AC と $A'C$）をはり合せて得られる．この際，点 C は H に属していないから $\Gamma\backslash H$ には C に対応する点だけが抜けている．しかしその一点（cusp という）をつけ加えてコンパクト化すれば，一つの閉 Riemann 面（球と同相）が得られる．この場合，（H の中の）基本領域はコンパクトではないが，簡単な計算でわかるようにその（非ユークリッド）面積は有限になる．

モジュラー群 $\Gamma=SL_2(\boldsymbol{Z})$ についてもう一つ注目すべきことは，その中に部分群が沢山あることである．例えば，N を自然数とし

$$\Gamma(N)=\{\, a\in SL_2(\boldsymbol{Z}) \mid a_{11}\equiv a_{22}\equiv 1 \pmod{N},\ a_{12}\equiv a_{21}\equiv 0 \pmod{N}\,\}$$

とおけば，$\Gamma(N)$ は Γ の指数有限の部分群になる．（これを "主合同部分群" という．）一般に一つの群 G の二つの部分群 Γ_1, Γ_2 の間に

$$(\Gamma_1:\Gamma_1\cap\Gamma_2)<\infty, \qquad (\Gamma_2:\Gamma_1\cap\Gamma_2)<\infty$$

なる関係があるとき，"通約的" (commensurable) といい，$\Gamma_1\sim\Gamma_2$ とかく．上の例では $\Gamma\sim\Gamma(N)$．

5. 一変数（実数については2変数）の場合の話が大分長くなってしまったが，問題はさらに多変数の場合である．Poincaré 平面の高次元への最も自然な拡張は1920年代 E. Cartan によって研究された（非コンパクト型の）"対称空間" X であり，その運動群 G が **半単純群** と呼ばれるものなのである．（「数学セミナー」5, 6—78，杉浦光夫，「エリ・カルタンの数学」参照．ただし，この運動群 G はコンパクトな因子をもたず，またその中心は単位元だけになる．以後，単に "半単純群" というときにはこれらの仮定もみたされているものとする．）そこで半単純群 G の不連続部分群 Γ で X にコンパクト（または体積有限）な基本領域をもつもの（これは商空間 $\Gamma\backslash X$ ま

たは $\Gamma\backslash G$ が同様の性質をもつといっても同じことだが）を決定することが重要な問題になるのである．以後言葉を簡単にするために，体積有限な基本領域をもつ不連続群を（余り適切とはいえないが）**lattice,** 特に基本領域がコンパクトのとき **uniform** な lattice, そうでないとき **non-uniform** な lattice ということにしよう．モジュラー群 $SL_2(\boldsymbol{Z})$（および それと 通約的な部分群）は $SL_2(\boldsymbol{R})$ の中の non-uniform な lattice である．

高次元の場合の不連続群，特に X が対称領域になる場合の保型関数を組織的に研究した最初の人は C. L. Siegel であろう．彼は 1930 年代に 2 次形式論と関連していわゆる "Siegel 上半空間" 上 の モジュラー関数 の研究を始めたのであるが，その時の不連続群（"Siegel modular group"）はやはり non-uniform な lattice であった．彼は論文 "Symplectic Geometry"（後年 Acad. Press から出版された）の中で uniform lattice を構成する方法について，一変数の場合（上述）にふれた後に "It is not known to what extent the analytic and the geometric methods may be generalized ; however, we shall show in the following sections, that there is a generalization of the arithmetic method to the case of an arbitrary n." といっている．当時はまだ Γ を構成する「幾何学的方法」は "可能ではあろうが複雑すぎる" というように漠然と思われていたのではなかろうか．実際 Siegel が "Symplectic Geometry" の中で Poincaré 平面の幾何の拡張について精しく論じているのは恐らく将来それを不連続群の「幾何学的構成」に利用しようという腹案があったからであろう．

6. けれどもそれ以後長い間そのような幾何学的方法は発見されなかった．（その間 Siegel のモジュラー関数論は種々拡張されたけれども．）一方 1950 年代後半になって代数群の新しい研究が Borel, Weil, Chevalley 等によって進められるに従って，不連続群に対する認識も次第に深められた．そして実際高次元の場合には不連続群はそんなに沢山ないのではなかろうか？ という疑問が持たれるようになる．1960 年 Bombay の学会で Selberg は $n \geqslant$

3 のとき $SL_n(\boldsymbol{R})$ の uniform lattice は行列成分がすべて代数的数であるような群に共役であることを証明した．これは当時一つのショックであり，この頃から，高次元の lattice はモジュラー群のように整数論的に定義されるもの（およびそれと通約的なもの）しか存在しないのではないかと考えられるようになった．これが "Selberg 予想" である．次元が増えれば何でも自由度が増すように思うのは我々の錯覚に過ぎない！

（Selberg は周知のように素数定理の算術的証明で 1950 年に Fields 賞を受けた人である．その後不連続群にも興味を持ち，55 年には同じく Bombay の学会で有名な "trace formula" を発表している．）

さて lattice が余り沢山はないことを見るためには，まずそれが連続的に動かせるかどうかを見ることが先決問題である．2 に述べたユークリッド空

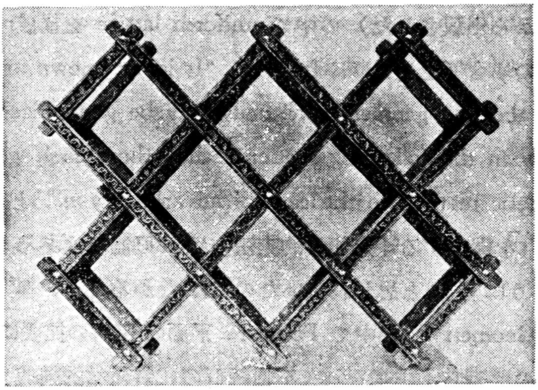


図 5

間の平行移動の群ではそれは明らかに可能であった．（図 5 を眺めてもそれがわかる．）また $SL_2(\boldsymbol{R})$ のときにも，その幾何学的構成法からそれが可能なことがわかる．（実際，種数 g の閉 Riemann 面の変形は $3g-3$ 個の複素パラメーターをもつことが知られている．）ただし非可換群の場合，"動かす" といっても内部自己同型による変形（すなわち，G の中の曲線 $c:\{g_t\ (0\leqslant t\leqslant 1)\}$ $(g_0=1)$ に沿って Γ を $\Gamma_t=g_t\Gamma g_t^{-1}$ でおきかえる操作）は自明だから，それ以外の連続変形ができるかどうかを問題にするのである．上記

Selberg の結果は $SL_n(\boldsymbol{R})$ $(n \geqslant 3)$ の場合それが不可能であることを示している．Selberg は他の古典群についても同様の結果が得られる可能性を示し，また Calabi, Vesentini 等も幾何学的見地から関連した結果を得ていたが，60～61 年に A. Weil は一挙に $PL_2(\boldsymbol{R})$ 以外の任意の半単純群 G に対し，その“既約”な uniform lattice Γ は上記の意味で連続変形不可能であることを証明した．（ここで“既約”とは G の直積分解 $G=G_1\times G_2$ で，$\Gamma_i=\Gamma\cap\Gamma_i$ とおくとき，$\Gamma\sim\Gamma_1\times\Gamma_2$ となるようなものが存在しないことをいう．）Weil は 61 年来日した折にこの結果について講演したが，その時雑談中“定理は証明できたが，何も応用がない”といったことを覚えている．

7. しかし Weil の結果はその後少くとも二つの方向に発展した．第一に，その少し前から松島氏によって $M=\Gamma\backslash X$ のベッチ数の研究がなされていたが，Weil の結果もコホモロジーを使って $H^1(\Gamma,\mathrm{ad})=0$ と表わされることがわかった．そしてこれを契機として不連続群のより大がかりなコホモロジー理論（調和形式論）が松島・村上，Raghunathan 等によって展開されることになった．（これから 70 年頃までの不連続群に関する主要な結果は Raghunathan の本，“Discrete subgroups of Lie groups”, Springer, 1972 に要約されている．）

一方，Weil の結果より強い意味の“rigidity”が Mostow によって考えられた．すなわち，G, G' を二つの半単純群，Γ, Γ' をその中の（uniform）lattice とする．Γ と Γ' とが抽象群として同型ならば，その同型を G と G' との（解析的）同型に拡大することはできないだろうか？（幾何学的にいえば，$M=\Gamma\backslash X$ の位相だけから，その Riemann 構造まで決まってしまうということである．）Weil の rigidity が局部的なものであったのに対してこれはいわば絶対的な rigidity であって“strong rigidity”と呼ばれている．この strong rigidity から Weil のそれが従うことは次のようにしてわかる．今 (G,Γ) に対して strong rigidity が成立するとし，Γ の連続変形 $\{\Gamma_t$ $(0\leqslant t\leqslant 1)\}$ が与えられたとしよう．仮定を $G'=G$, $\Gamma'=\Gamma_t$ の場合に適

用すれば，G の自己同型 $\sigma_t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ で $\Gamma_t = \sigma_t(\Gamma)$ となるものが存在する．しかし $\sigma_0 = 1$ であるから σ_t は G の自己同型群の単位元の連結成分に含まれ，従ってよく知られた定理によって内部自己同型になってしまう．すなわち Weil の rigidity が成立する．

Mostow は 65 年頃，$\Gamma \cong \Gamma'$ ならば対称空間 X から X' への Γ-equivariant な写像が得られるが，その X の境界（Furstenberg の“極大境界”と呼ばれるもの）への制限が微分可能になるならば，strong rigidity が成立することを発見した．そしてこのプログラムに従って，X が（負の）定曲率空間の場合から始めて次第に一般化し，73 年ついに一般の結果に到達した．すなわち Weil の定理と全く同じ仮定の下に strong rigidity も成立することを証明したのである．（その結果はまとめて，Ann. of Math. Study, No. 78, Princeton に発表された．）

以上はいずれも uniform lattice に関する結果である．non-uniform lattice に対しても Garland, Raghunathan 等によって部分的な結果が得られたが，最終的には Margulis の登場を待たねばならなかった．これについてはまた後に述べることにする．

8. 60 年代には代数群の理論自身も著しい進歩をした．特に Borel は古典的な reduction theory を一般の数論的不連続群の場合に拡張することに成功した．（“数論的不連続群”とは，G が有理数体 $\boldsymbol{Q}$ 上定義された代数群になるような行列表現 $G \subset GL_N(\boldsymbol{R})$ をとったとき，その“モジュラー群” $G_{\boldsymbol{Z}} = G \cap GL_N(\boldsymbol{Z})$，およびそれと通約的な部分群をいう．）62 年，Borel は (Harish-Chandra と共同で) 数論的不連続群が実際体積有限な基本領域をもつこと，すなわち lattice になることを一般に証明した．またそれが uniform になるためには，G の $\boldsymbol{Q}$-rank が 0 であることが必要十分であることも示した．この結果はほとんど同時に Mostow–玉河によっても証明された．また Γ が non-uniform なとき，$\Gamma\backslash X$ のコンパクト化も論ぜられた．［ここで“$\boldsymbol{Q}$-rank”とは，G の一つの $\boldsymbol{Q}$-構造を決めたとき，上述のような行列

表現 $G \subset GL_N(\boldsymbol{R})$ において G に含まれる対角行列の作る部分群の最大次元をいう．従って $\boldsymbol{Q}$-rank 0 という条件は $G_{\boldsymbol{Q}} = G \cap GL_N(\boldsymbol{Q})$ の中に単位行列以外の対角行列が含まれ得ないことをいうのである．それはまた $G_{\boldsymbol{Q}}$ または Γ が単位行列以外の unipotent 行列を含まないことと同値である．ついでながら，“$\boldsymbol{R}$-rank”（単に rank ともいう）とは，この定義で G の“$\boldsymbol{Q}$-構造”を無視し G のすべての行列表現を考えたとき，G に含まれる対角行列の作る部分群の最大次元として定義される．それはまた対称空間 X に含まれる flat な部分空間の最大次元と同じである[†]．]

一方，66～67年にはソ連の数学者 Makarow, Vinberg 等によって，Lobachevsky 空間（負の定曲率空間）X の鏡影群が研究され，その中には数論的でない lattice も存在することが示された．（待望の「幾何学的構成」ができたのである．）これは $G = SO(n-1, 1)$ の場合であり，従って G の $\boldsymbol{R}$-rank は 1 である．そこで Selberg 予想は正確には次のように述べられることになった：

“G を $\boldsymbol{R}$-rank $\geqq 2$ の（コンパクト因子をもたない）半単純群，Γ を G の中の既約な non-uniform lattice とすれば，Γ は数論的である．すなわち G を $\boldsymbol{Q}$ 上の代数群として表わすある行列表現が存在して，Γ は $G_{\boldsymbol{Z}}$ と通約的になる．”

（uniform lattice に対しては“数論的”の定義を少し改める必要があるのでここでは除外した．）

9． さていよいよ Margulis の出番である．上に述べた Borel-Harish-Chandra-Mostow-Tamagawa の定理によれば，数論的な lattice Γ については，それが non-uniform ならば，必ず（単位元以外の）unipotent 行列を含む．これが一般に，数論的という仮定なしにも成立するだろうと，以前から (Selberg 等によって）予想されていたのであるが，1968～69年に Margulis は Kajdan と共同でこの予想を証明した．（本来の）Selberg 予想には長い

†） 本書「リー群の話」第9章参照．

間全く手がかりがなかったのであるが，ここに初めて一つの突破口が見つかったのである．今までかくれていた問題の裏面に初めて光が当てられたのである．実際，Margulis はまずこの unipotent な元の存在から Γ に十分大きい unipotent 部分群が存在すること，さらに（$\boldsymbol{R}$-rank $\geqslant 2$ の仮定の下に）それに適合した G の $\boldsymbol{Q}$-構造の存在することを導き，Γ が "ほとんど" 数論的であることを示した．そしてその結果を次第に強めて，73年に Γ が数論的であることを完全に証明した．（少しおくれて Raghunathan もやや強い条件の下に同じ結果に到達した．）同時に Margulis はこの Γ について Mostow の strong rigidity も成立することを証明した．これは $\boldsymbol{R}$-rank $\geqslant 2$ の場合であるが，$\boldsymbol{R}$-rank $= 1$ の non-uniform lattice については，同じ年に Garland-Raghunathan がその reduction theory を与え，その応用としてやはり strong rigidity の成立を（$SL_2(\boldsymbol{R})$ の場合を除き）示している．

以上は non-uniform lattice の arithmeticity であった．uniform lattice の場合には手がかりとなった unipotent 元が存在しないので，問題は一層難しくなる．しかし Margulis は strong rigidity を p-進リー群を含む場合に拡張することによりそれを克服した．この場合，Γ を数論的部分群として含む代数群を得るためには，G に多数のコンパクト因子をつけ加えねばならず，その構成法は全く未知であった．このように多くの難関を独力で切り開いた Margulis の独創性はまさに驚異的である．

74年 Vancouver の Congress で Margulis は（やはり出席はしなかったが）uniform と non-uniform の場合を統一的に扱う方法を発表した．Tits がその原稿をもとに Paris で講義し，その要約を Séminaire Bourbaki, No. 482 で報告している．Tits は Helsinki Congress においても Margulis の業績を紹介した後，"自分は彼の論文を研究することにより，今までの生涯で一番多くを学んだ" といって称讃した．（もっとも Tits は非常にお世辞のうまい人である．）Margulis はさらに彼の証明を整理改良し，前記 Raghunathan の本のロシヤ語訳の Appendix として発表している．

10. けれども問題はまだ終ったわけではない．第一に $\boldsymbol{R}$-rank 1 の場合の lattice はどのようなものだろうか？ Vinberg 等は $SO(n-1,1)$ ($n=4,5,6$) の中の数論的でない lattice の例を与えたが，ごく最近 Mostow は $SU(2,1)$ の中の数論的でない lattice の例を計算機のたすけをかりて作り上げた．(それは 3 個の "complex" reflections から生成され，一頂点を固定する部分群の位数が 600 であるというから，かなり大変な群である．) 一方，Vinberg は $SO(n-1,1)$ ($n\geqslant 21$) の数論的な lattice が鏡影群ではないことを示した．一体，数論的でもなく鏡影群でもない lattice は存在するだろうか？ いずれにせよ $\boldsymbol{R}$-rank 1 の群 G (特に $SO(n-1,1)$) の中の lattice を完全に決定することは数論的にも幾何学的にも興味深い問題であろう[†]．

第二に strong rigidity によれば，$PL_2(\boldsymbol{R})$ 以外の半単純群はそれに含まれる既約な lattice によって完全に決まってしまうわけである．そこでこのような lattice，特に uniform なものを抽象群として特徴づけることはできないだろうか？ それはコンパクトな局所対称 Riemann 空間 M の基本群 Γ の型を決めることである．特に X が対称領域になるとき，$M=\Gamma\backslash X$ は代数多様体になるが，このようにして得られる代数多様体の代数幾何的特徴づけはできないだろうか？

さらに Margulis の定理によれば，$\boldsymbol{R}$-rank $\geqslant 2$ のとき，Γ は数論的であるが，それは一体 M の位相的あるいは幾何学的性質にどのように反映されているのだろうか？ 我々はある場合に $M=\Gamma\backslash X$ の Euler 指標が (Gauss-Bonnet の定理を仲介として) Γ を定義する代数体の ζ-関数の値と関係することを知っている．けれども我々のこの方面の知識は未だ非常に限られていて多くの謎に包まれている．(X が対称領域であるときには，志村氏の canonical model の理論があるが，一般にも何かそれに相当するものがあるのだろうか？ ……)

---

†) 特に 3 次元 ($n=4$) の場合については最近 Thurston, Sullivan 等により活発な研究が行われている．J. Milnor, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 9–24 参照．

11. 周知のように Fields 賞は数学の Nobel 賞に当るものであるが，その選考方法等については批判がないわけではない． Margulis の場合についていえば，上の説明からもわかるように，彼の仕事は数多くのすぐれた先駆者の結果に依存している．（しかしそれだけに問題が難しくなったといえる．）また Selberg 予想は数学全体からいえば極めて特殊な問題だということもできよう．けれども Margulis のように一つの難問にひたむきに取りくむ勇気のある数学者は非常に得難い存在であって，そのような数学者のアイディアによって数学は時に思いがけない進歩をするものなのである．

「数学セミナー」(1978年12月号) に「ソ連の数学の現状」と題する一文が載っている．それによれば，“アカデミーの会員の急変があって以来，多くの重要な結果，とくに若い人々のものが，Doklady に載らなくなった．それらの大部分は，Uspehi Mat. Nauk の短い報告中に，モスクワ数学会通信の題で出版されている．” Margulis は Academy of Science の Institute for Transmission of Information に属しているそうであるが，その論文は幸いにして Funktcional. Anal. i Priložen. 等の雑誌に発表されていて多くは英訳で読むことができる．しかし論文を発表することのできないかくれた Margulis もいるのではなかろうか．こうした有能な少壮数学者がその専門の学問に専念できず，また外国の学者と自由に会う機会も与えられていないのは大変残念なことである．上記「現状」は次のようにいっている：“ソ連の学者に招待状を送ることは，たとえ受理されなくても重要である．ソ連の数学の今日の状況から見て，外国で認められることが，政治的機構を通してえられた評判から，真の学術上の能力を区別する唯一の方法である．”

附記． Margulis の業績についての紹介はすでに「数学」(**31** (1979) p. 43) に伊原信一郎氏の記事がある．小文で省略した定義，文献等についてはそれを参照されたい．同氏の御厚意でその原稿を発表前に見せて頂いたことを記し感謝したい．また筆者は Helsinki Congress の後 Leningrad の Hermitage

美術館で偶然 Margulis 氏に遇うことができた．冒頭の写真はそのときのものである．彼は 1946 年，Moscow 生れ，明るい眼をした好青年である．

（「数学セミナー」1979 年 6 月号所載）

練習問題の解答

リー群の話

第5章，p. 61，定理4の証明．

ジョルダン標準形を使ってもよいが，そこまで行かず次の分解を使うのが便利だろう．すなわち，任意の（実または複素）n 次行列 A は $A=S+N$，S は対角化可能，N は巾零，$[S,N]=0$，と分解される．（「線型代数学」，p. 146，例1）この分解から $\exp tA$ の分解

$$\exp tA=(\exp tS)(\exp tN)=\exp tS+(\exp tS)(\exp tN-1_n)$$

が得られる．よって（A を実行列とし）$H=\{\exp tA\ (t\in \boldsymbol{R})\}$ とおくとき，H が（II）型または（III）型になる，すなわち $\exp tA$ が有界になるためには $\exp tS$，$\exp tN$ が共に有界であることが必要十分である．$S\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$ とすれば，$\exp tS\sim\begin{pmatrix}e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n}\end{pmatrix}$ であるから，$\exp tS$ が有界であるためには，すべての $e^{t\lambda_i}\ (1\leqslant i\leqslant n)$ が有界，そのためにはすべての λ_i が純虚数であることが必要十分である．一方，$N^n=0$ であるから

$$\exp tN=1_n+tN+\frac{1}{2}t^2N^2+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}N^{n-1}.$$

よって $\exp tN$ が有界であるためには $N=0$ が必要十分である．これで定理4の前半は証明された．さて，$A=S$ で，S の固有値が純虚数のとき

$$S\sim\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & & & 0\\ & \bar{\lambda}_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_r & & & & \\ & & & & \bar{\lambda}_r & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 0\end{pmatrix},\qquad \lambda_i=\alpha_i\sqrt{-1},\quad \alpha_i>0$$

とすることができる．そのとき

$$\exp tS \sim \begin{pmatrix} \cos\alpha_1 t & -\sin\alpha_1 t & & & & & & 0 \\ \sin\alpha_1 t & \cos\alpha_1 t & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \cos\alpha_r t & -\sin\alpha_r t & & & \\ & & & \sin\alpha_r t & \cos\alpha_r t & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

もし α_i/α_j が無理数であるような i, j があれば，本文で述べたように H は閉部分群ではなく，したがって（III）型になる．α_i/α_j がすべて有理数であるときには

$$\alpha_1 : \alpha_2 : \cdots : \alpha_r = m_1 : m_2 : \cdots : m_r$$

となるような正の整数 m_i をとり，$\alpha_i/m_i = \alpha_0$，また $m_1, \cdots, m_r$ の最大公約数を m_0，$t_0 = 2\pi/m_0\alpha_0$ とおけば，明らかに $\exp t_0S = 1_n$．したがって H は（II）型になる．これで後半も証明された．（証終）

第7章，p. 87，練習問題．

まず本文（補題1の証明）でも使った“固有値の連続性”を説明しておく，一般に A を n 次複素行列，その固有多項式を

$$\begin{aligned} f_A(x) &= x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n \\ &= (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n) \end{aligned}$$

とすれば，明らかに $a_1, \cdots, a_n$ は A の連続関数（実際，多項式関数），$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は $a_1, \cdots, a_n$ の連続関数である．この（後半の）意味は，与えられた $(a_i), (\alpha_i)$ と $\varepsilon > 0$ に対し，十分小さい $\delta > 0$ をとれば，$|a_i' - a_i| < \delta$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，

$$x^n + a_1'x^{n-1} + \cdots + a_n' = (x-\alpha_1')\cdots(x-\alpha_n')$$

であるとき，(α_i') の番号を適当にえらべば，$|\alpha_i' - \alpha_i| < \varepsilon$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ が成立する，ということである．特に $S_1 \in \mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ の符号が (p_1, q_1) であるとき，S_1 の固有値 (α_i) を大きさの順に並べて

$$\begin{aligned} \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{p_1} > \alpha_{p_1+1} = \cdots = \alpha_{n-q_1} = 0 \\ > \alpha_{n-q_1+1} \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n \end{aligned}$$

とし，$\varepsilon = \mathrm{Min}(\alpha_{p_1}, |\alpha_{n-q_1+1}|)$ とおけば，S_1 の $\mathrm{Sym}_n(\boldsymbol{R})$ におけるある近傍 U_1 があって，$S_2 \in U_1$ のとき，S_2 の固有値を（適当な順序，例えば大きさの順序に並べて）(α_i') とすれば，$|\alpha_i' - \alpha_i| < \varepsilon$ が成立する．この不等式から，

$$\alpha_i' > 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant p_1), \qquad \alpha_i' < 0 \quad (n-q_1+1 \leqslant i \leqslant n)$$

を得る．よって S_2 の符号を (p_2, q_2) とすれば，$p_2 \geqslant p_1$，$q_2 \geqslant q_1$ が成立する．

さて，$S_1 \in \overline{\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}}$ とすれば，S_1 の任意の近傍 U_1 に対し $U_1 \cap \mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)} \neq \phi$．特に

U_1 を上記のようにえらべば，$p \geqslant p_1$, $q \geqslant q_1$ であることがわかる．よって $\overline{\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}} \subset \bigcup \mathcal{S}_{p_1,q_1}{}^{(n)}$ $(p_1 \leqslant p, q_1 \leqslant q)$ はよい．逆に $S_1 \in \mathcal{S}_{p_1,q_1}{}^{(n)}$, $p_1 \leqslant p, q_1 \leqslant q$ とし

$$aS_1a^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$$

となるような直交行列 a をえらぶ．

$$\beta_i{}^{(\nu)} = \begin{cases} \alpha_i & (1 \leqslant i \leqslant p_1,\ \text{または}\ n-q_1+1 \leqslant i \leqslant n) \\ \nu^{-1} & (p_1+1 \leqslant i \leqslant p) \\ -\nu^{-1} & (n-q+1 \leqslant i \leqslant n-q_1) \\ 0 & (p+1 \leqslant i \leqslant n-q), \end{cases}$$

$$S^{(\nu)} = a^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1{}^{(\nu)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n{}^{(\nu)} \end{pmatrix} a$$

とおけば，明らかに $S^{(\nu)} \in \mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}$ で $\lim_{\nu\to\infty} S^{(\nu)} = S_1$. よって $S_1 \in \overline{\mathcal{S}_{p,q}{}^{(n)}}$ を得る．これで逆の包含関係も証明された．(証終)

第 8 章，p. 101，**練習問題．**

証明． (24) から

$$\begin{aligned} \dim K_S &= \dim O(p) + \dim O(q) \\ &= \frac{1}{2}p(p-1) + \frac{1}{2}q(q-1). \end{aligned}$$

一方，(27) から $\dim \mathcal{P}_S = pq$. よって

$$\begin{aligned} \dim G_S &= \dim K_S + \dim \mathcal{P}_S \\ &= \frac{1}{2}p(p-1) + \frac{1}{2}q(q-1) + pq \\ &= \frac{1}{2}(p+q)^2 - \frac{1}{2}(p+q) \\ &= \frac{1}{2}n(n-1). \end{aligned}$$

(証終)

p. 101，G_S $(S = 1_{p,q}{}^{(n)},\ p+q < n)$ **の構造．**

一般に $S = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $S_1 \in \mathrm{Sym}_r(\boldsymbol{R})$, $\det(S_1) \neq 0$ とし，　$G_S = \{ g \in GL(n, \boldsymbol{R}) \mid gS{}^tg = S \}$ の構造を考える．$g = \begin{pmatrix} g_1 & g_{12} \\ g_{21} & g_2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \}r \\ \}n-r \end{matrix}$ と分解すれば，簡単な計算で

$$gS{}^tg=S \Longleftrightarrow \begin{cases} g_1S_1{}^tg_1 = S_1 & \cdots\cdots(1) \\ g_1S_1{}^tg_{21} = 0 & \cdots\cdots(2) \\ g_{21}S_1{}^tg_{21} = 0 & \cdots\cdots(3). \end{cases}$$

(1) から $\det(g_1)\neq 0$, $g_1\in G_{S_1}$, したがって (2) から $g_{21}=0$ を得る．［よって (3) は自動的に成立する．］よって $\det(g)=\det(g_1)\det(g_2)$ となり，$\det(g_2)\neq 0$, $g_2\in GL(n-r,\boldsymbol{R})$ でなければならない．したがって

$$G_S=\left\{\begin{pmatrix} g_1 & g_{12} \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \middle| \ g_1\in G_{S_1},\ g_2\in GL(n-r,\boldsymbol{R}),\ g_{12}\ \text{は任意}\right\}$$

を得る．$K=O(n)$, $K_S=K\cap G_S$ とおけば，同様の計算により

$$K_S=\left\{\begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \middle| \ g_1\in K_{S_1},\ g_2\in O(n-r)\right\}$$

を得る．

$S_1{}^2=1_r$ (例えば $S_1=1_{p,q}$, $p+q=r$) とすれば，カルタン分解

$$G_{S_1}\approx K_{S_1}\times\mathcal{P}_{S_1}, \qquad GL(n-r,\boldsymbol{R})\approx O(n-r)\times\mathcal{P}^{(n-r)}$$

から，上の結果により

$$\begin{aligned} G_S &\approx G_{S_1}\times GL(n-r,\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{R}^{r(n-r)} \\ &\approx (K_{S_1}\times O(n-r))\times(\mathcal{P}_{S_1}\times\mathcal{P}^{(n-r)}\times\boldsymbol{R}^{r(n-r)}) \\ &\approx K_S\times\boldsymbol{R}^{(n^2-p^2-q^2+n-r)/2}. \end{aligned}$$

$p>0$, $q>0$, $p+q<n$ のとき，K_{S_1} は4個，$O(n-r)$ は2個の連結成分をもつから，K_S, したがって G_S は8個の連結成分をもつ．

K_S が G_S の極大コンパクト部分群であることを証明しよう．上の記号で対応 $g\longmapsto g_1$, $g\longmapsto g_2$ をそれぞれ φ_1,φ_2 で表わせば，φ_1,φ_2 は G_S から $G_{S_1}, GL(n-r)$ の上への準同型になる．今，$K_S\subsetneqq K'\subset G_S$ であるようなコンパクト群 K' があったとすれば，$\varphi_1(K')$ もコンパクトで，$K_{S_1}\subset\varphi_1(K')\subset G_{S_1}$ であるから，K_{S_1} の極大性により $\varphi_1(K')=K_{S_1}$. 同様にして $\varphi_2(K')=O(n-r)$ を得る．$K'\neq K_S$ であるから $k'\in K'$, $\notin K_S$ であるような k' が存在する．$\varphi_1(k')=k_1$, $\varphi_2(k')=k_2$, $k=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$ とおけば，上記により $k\in K_S$ である．$k''=k'k^{-1}(\in K')$ とおけば，$\varphi_1(k'')=1_r$, $\varphi_2(k'')=1_{n-r}$. よって $k''=\begin{pmatrix} 1_r & a \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$ $(a\neq 0)$ の形になる．明らかに $k''^{\nu}=\begin{pmatrix} 1_r & \nu a \\ 0 & 1_{n-r} \end{pmatrix}$ であるから，$\{k''^{\nu}\}$ は収束する部分列をもたない．これは矛盾である．

第9章，p. 114，補題3の証明.

$a=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}\in A^{(n)}$ に対し，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ のうち相異なるものの個数を $\nu(a)$ で表わす．H を $A^{(n)}$ の任意の部分群とし，$\{\nu(a)\mid a\in H\}$ の最大値を ν_0 とする．$a\in H$,

$\nu(a)=\nu_0$ ならば，a は H の“一般元”であることを証明しよう．$\nu_0=n$ ならばこれは明白だから，$\nu(a)=\nu_0<n$ とし，簡単のため $\alpha_1,\cdots,\alpha_{\nu_0}$ が相異なるものとする．もし a が一般元でないならば，ある $a'=\begin{pmatrix}\alpha_1' & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n'\end{pmatrix}\in H$ が存在し，ある i,j に対し，$\alpha_i=\alpha_j$, $\alpha_i'\neq\alpha_j'$．適当に番号をつけかえ，$(i,j)=(\nu_0,\nu_0+1)$ であるとしてよい．さて，与えられた $i<\nu_0$ に対し

$$(*)\qquad \alpha_i{}^m\alpha_i'=\alpha_{\nu_0+1}{}^m\alpha_{\nu_0+1}',$$

または与えられた $1\leqslant i<j\leqslant\nu_0$ に対し

$$(**)\qquad \alpha_i{}^m\alpha_i'=\alpha_j{}^m\alpha_j'$$

となるような正の整数 m は存在したとしてもそれぞれ高々1個しかない．よってある m_0 に対し $(*)$, $(**)$ はすべて成立しない．(そのような m_0 は無数にある.) そのとき m_0 のとり方から $\alpha_i{}^{m_0}\alpha_i'$ $(1\leqslant i\leqslant\nu_0+1)$ は相異なる．よって $\nu(a^{m_0}a')\geqslant\nu_0+1$ となり矛盾である．(証終)

第10章，p. 127，1) の証明．

まず $g\in G'=Sp(2n,\boldsymbol{R})$ ならば ${}^tg\in G'$ であることに注意する．(実際，$J_n{}^{-1}=-J_n$ を使って，$g\in G'\Longrightarrow {}^tgJ_ng=J_n\Longrightarrow gJ_n{}^{-1}\,{}^tg=J_n{}^{-1}\Longrightarrow {}^tg\in G'$.) したがって $g\in G'$ とすれば，${}^tgg\in G'\cap\mathcal{P}^{(2n)}=\mathcal{P}'$ である．第8章，補題2の後の系1により，ある $p\in\mathcal{P}^{(2n)}$ があって，$p^2={}^tgg$．そのとき $p\in\mathcal{P}'$ である．実際，$p'=J_npJ_n{}^{-1}$ とおけば，${}^tJ_n=-J_n=J_n{}^{-1}$ により，$p'\in\mathcal{P}^{(2n)}$, $p'^2=J_np^2J_n{}^{-1}=(p^2)^{-1}$．よって $\mathcal{P}^{(2n)}$ における“平方根”の一意性により $p'=p^{-1}$，したがって $pJ_np=J_n$, $p\in G'$ となる．そこで $k=gp^{-1}$ とおけば，$k\in G'$, ${}^tkk=1$．したがって $k\in G'\cap O(2n)=K'$．よって $G'=K'\cdot\mathcal{P}'$ を得る．分解 $g=kp$ の一意性は既知 (第8章，定理1) であるから $G'\approx K'\times\mathcal{P}'$ となる．

一般に $k\in O(2n)$ の行列を $k=\begin{pmatrix}k_1 & k_{12}\\ k_{21} & k_2\end{pmatrix}$ とかけば

$$\begin{aligned}k\in K'&\Longleftrightarrow {}^tkJ_nk=J_n\Longleftrightarrow J_nk=kJ_n\\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix}k_{21} & k_2\\ -k_1 & -k_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_{12} & k_1\\ -k_2 & k_{21}\end{pmatrix}\\ &\Longleftrightarrow k_1=k_2,\ k_{21}=-k_{12}.\end{aligned}$$

よって $k=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ とかける．さらにこの形の $2n$ 次行列 k に対して

$$\begin{aligned}k\in K'&\Longleftrightarrow {}^tk=k^{-1}\\ &\Longleftrightarrow {}^taa+{}^tbb=1_n,\quad {}^tab={}^tba\\ &\Longleftrightarrow {}^t(a-ib)(a+ib)=1_n\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow a+ib \in U(n).$$

よって対応 $k \longleftrightarrow a+ib$ により，$K' \cong U(n)$ である．($k' \longleftrightarrow a'+ib'$ ならば，$kk' \longleftrightarrow (a+ib)(a'+ib')$ は容易に確かめられる．) 第8章，補題2と同じ論法により（実際はより簡単に）$U(n)=\exp(i\,\mathrm{Her}_n(\boldsymbol{C}))$ が証明される．ここに $\mathrm{Her}_n(\boldsymbol{C})$ は n 次のエルミット行列全体の作るベクトル空間を表わす．[$\mathrm{Lie}\,U(n)=i\,\mathrm{Her}_n(\boldsymbol{C})$ である．] よって $U(n)$，したがって K', G' も連結である．K' は明らかにコンパクトであるが，G' の極大コンパクト部分群である．実際，$K' \subsetneqq K'' \subset G'$ となるようなコンパクト部分群 K'' が存在すれば，(17) により，$x \in K'' \cap \mathcal{P}'$, $x \neq 1_{2n}$ がとれる．しかし $\{x^\nu\ (\nu=1,2,\cdots)\}$ は（G' の中に）集積点をもたないからこれは矛盾である．（証終）

2) の証明.　$A'=A^{(2n)}\cap G'$ とおけば，簡単な計算で

$$A'=\left\{a=\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1{}^{-1}\end{pmatrix} \middle| \, a_1 \in A^{(n)}\right\}.$$

となることがわかる．便宜上，J_n のかわりに

$$V'=\begin{pmatrix} 0 & V^{(n)} \\ -V^{(n)} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & & & & & 1 \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \\ & & -1 & & & \\ -1 & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

を使って

$$G''=\{\,g \in GL(2n,\boldsymbol{R}) \mid {}^t g V' g = V'\,\},$$
$$K''=O(2n)\cap G'', \qquad \mathcal{P}''=\mathcal{P}^{(2n)}\cap G'',$$
$$A''=A^{(2n)}\cap G'', \qquad A_+''=A_+{}^{(2n)}\cap G''$$

（記号 $A^{(2n)}, A_+{}^{(2n)}$ 等は第9章に定義したもの）

とおき，A'' が $\mathcal{P}''$ の中の極大部分群であり，また $\mathcal{P}''$ の任意の極大部分群は K'' に関して A'' と共役であることをいう．そのためには $\mathcal{P}''$ に含まれる任意の部分群 H に対し，ある $k' \in K''$ があって $k'^{-1}Hk' \subset A''$ となることをいえば十分である．まず第9章，補題2と全く同じ（実際は少し簡単な）論法により，任意の $p \in \mathcal{P}''$ を

$$p=kak^{-1}, \qquad k \in O(2n), \quad a \in A_+{}^{(2n)}$$

の形にかいたとき，$a \in A_+''$，また k を（適当にとり直して）$k \in K''$ となるようにすることができる．[定義から直ちに

$$A_+''=\left\{a=\begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_{2n}\end{pmatrix} \middle| \, \alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n \geqslant 1,\ \alpha_{2n-i+1}=\alpha_i{}^{-1}\right\}$$

であることがわかる.] さて $\mathcal{P}''$ に含まれる部分群 H が与えられたとき，第9章，定理1により，ある $k \in O(2n)$ があって $k^{-1}Hk \subset A^{(2n)}$．$k^{-1}Hk$ の "一般元" a_0 をとり $p_0=ka_0k^{-1}$（$\in H$）とおく．k を $kT_\sigma{}^{-1}$（T_σ は適当な置換の行列）でおきかえ，

$a_0 \in A_+^{(2n)}$ と仮定してよい．そのとき上記により $a_0 \in A_+''$．また，ある $T \in O(2n)$ があって $Ta_0 = a_0T$，$k' = kT \in K''$．したがってすべての $a \in k^{-1}Hk$ に対し，$Ta = aT$ が成立し，$k'^{-1}Hk' = k^{-1}Hk \subset A^{(2n)} \cap G'' = A''$．（証終）

第 11 章，p. 137，練習問題． 第 12 章，p. 144 参照．

第 12 章，p. 145，練習問題．

証明． $\mathrm{ad}(\exp tB)$ と $\exp(t\,\mathrm{ad}\,B)$ は共に $GL(\mathfrak{g}_l)$ の中のワン・パラメーター部分群であり，その $1_{\mathfrak{g}_l}$ における接ベクトルは共に $\mathrm{ad}\,B$ である．（前者については本文をみよ．）したがってワン・パラメーター群の一意性（第 3 章）により両者は一致する．（証終）

第 13 章，p. 158，練習問題 1．

(3) に現われる作用素行列の成分は互に（作用素として）可換であるから，両辺の作用素としての行列式をとることにより

$$\rho_a{}'^{*-1}\circ\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\circ\rho_a{}'^{*} = \det({}^t a)\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\det(a)$$

$$= \det(a)^2\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \qquad (a \in G).$$

同様に (4) から

$$\rho_a{}'^{*}\circ\det(x)\circ\rho_a{}'^{*-1} = \det(a)^{-2}\det(x).$$

よって

$$\rho_a{}'^{*}\circ\det(x)\circ\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\circ\rho_a{}'^{*-1} = \det(x)\circ\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

したがって $\Delta_n = \det(x)\circ\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ は不変微分作用素である．

$n=2$ のとき，便宜上 $x_{12} = y$ とおけば

$$\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\det(x) = \begin{vmatrix} x_1 & y \\ y & x_2 \end{vmatrix} = x_1x_2 - y^2.$$

よって

$$\varDelta_2 = \det(x)\det\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = (x_1x_2-y^2)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{4}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

一方,

$$D_1{}^2 = \left(x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2$$

$$= x_1{}^2\frac{\partial^2}{\partial x_1{}^2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2{}^2\frac{\partial^2}{\partial x_2{}^2}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+y^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y\frac{\partial}{\partial y}$$

$$+2x_1x_2\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}+2x_1y\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial y}+2x_2y\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial y}.$$

よって p. 157 の式により

$$D_1{}^2-D_2 = -\frac{1}{2}(x_1x_2-y^2)\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}+2(x_1x_2-y^2)\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}-\frac{1}{2}D_1$$

$$= 2\varDelta_2-\frac{1}{2}D_1.$$

よって $\varDelta_2 = \dfrac{1}{2}(D_1{}^2-D_2)+\dfrac{1}{4}D_1$ を得る.

p. 160, **練習問題 2.**

証明. まず次の二式を証明する：

(20. a) $$\iota^*\circ x\circ\iota^* = x^{-1},$$

(20. b) $$\iota^*\circ\frac{\partial}{\partial x}\circ\iota^* = -x\frac{\partial}{\partial x}x \qquad \text{(右辺は“代数的”な積)}$$

実際, f を $\mathcal{P}^{(n)}$ 上の任意の（微分可能な）関数とすれば

$$((\iota^*\circ x\circ\iota^*)f)(y) = ((x\circ\iota^*)f)(y^{-1})$$
$$= x^{-1}((\iota^*f)(y^{-1}))$$
$$= x^{-1}f(y).$$

よって (20. a) を得る.

(20. b) を証明するために, $X = x^{-1}$ とおき, X の (i,j) 成分（を表わす関数）を X_{ij} とかく.（すなわち関数として $X_{ij} = \iota^*x_{ij}$ である.）$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}X_{jk} = \delta_{ik}$ の両辺を x_{pq} $(p\neq q)$ で微分すれば

$$\sum_j(\delta_{pi}\delta_{qj}+\delta_{pj}\delta_{qi})X_{jk}+\sum_j x_{ij}\frac{\partial X_{jk}}{\partial x_{pq}} = 0,$$

$$\therefore\quad \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\frac{\partial X_{jk}}{\partial x_{pq}} = -(\delta_{pi}X_{qk}+\delta_{qi}X_{pk}),$$

$$\therefore\quad \frac{\partial X_{lk}}{\partial x_{pq}} = -(X_{lp}X_{qk}+X_{lq}X_{pk}).$$

同様に $p=q$ のときは

$$\frac{\partial X_{lk}}{\partial x_{pp}} = -X_{lp}X_{pk}.$$

これらをまとめて

$$\frac{\partial X_{kl}}{\partial x_{pq}} = -\frac{1}{1+\delta_{pq}}(X_{pk}X_{lq}+X_{pl}X_{kq}) \tag{22}$$

とかくことができる．さて

$$\frac{\partial}{\partial x_{pq}}(\iota^* f) = \frac{\partial}{\partial x_{pq}}f(X) = \sum_{k\leqslant l}\frac{\partial f}{\partial x_{kl}}(X)\frac{\partial X_{kl}}{\partial x_{pq}}$$

であるから，(22) により

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_{pq}}(\iota^* f) &= -\frac{1}{1+\delta_{pq}}\sum_{k\leqslant l}\frac{\partial f}{\partial x_{kl}}(X)\cdot(X_{pk}X_{lq}+X_{pl}X_{kq})\\ &= -\frac{1}{1+\delta_{pq}}\sum_{k,l=1}^{n}(1+\delta_{kl})\frac{\partial f}{\partial x_{kl}}(X)X_{pk}X_{lq}.\end{aligned}$$

よって

$$\left(\iota^*\circ\frac{\partial}{\partial x_{pq}}\circ\iota^*\right)f = -\frac{1}{1+\delta_{pq}}\sum_{k,l=1}^{n}(1+\delta_{kl})x_{pk}\frac{\partial f}{\partial x_{kl}}x_{lq}.$$

これをまとめて行列の形にかけば (20.b) を得る．

(20.a), (20.b) から

$$\begin{aligned}\iota^*\circ\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)\circ\iota^* &= (\iota^*\circ x\circ\iota^*)\left(\iota^*\circ\frac{\partial}{\partial x}\circ\iota^*\right)\\ &= x^{-1}\left(-x\frac{\partial}{\partial x}x\right)\\ &= -\frac{\partial}{\partial x}x\end{aligned}$$

(右辺の積は代数的な積であることに注意)．よって (20) が得られた．この式の両辺を（作用素行列として）k 乗し，トレイスをとれば，

$$\iota^*\circ D_k\circ\iota^* = (-1)^k\,\mathrm{tr}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)^k\right). \tag{23}$$

$k=1$ の場合には $\mathrm{tr}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)=\mathrm{tr}\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)$ であるから，上式から (21) が得られる．

$k=2$ の場合にも $\mathrm{tr}\left(\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\right)=\mathrm{tr}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)^2\right)$ が成立することを示そう．[作用素の積（合成）は可換ではないのでこの等式は自明ではない！]

まず $\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2$ の (i,j) 成分は定義により

$$\sum_{k_1,k_2,k_3=1}^{n}\left(x_{ik_1}\frac{1+\delta_{k_1k_2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_1k_2}}\right)\circ\left(x_{k_2k_3}\frac{1+\delta_{k_3j}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_3j}}\right)$$
$$=\sum x_{ik_1}\frac{1+\delta_{k_1k_2}}{2}\delta_{k_1k_3}\frac{1+\delta_{k_3j}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_3j}}$$
$$+\sum x_{ik_1}\frac{1+\delta_{k_1k_2}}{2}x_{k_2k_3}\frac{1+\delta_{k_3j}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_{k_1k_2}\partial x_{k_3j}}$$
$$=\frac{n+1}{2}\sum x_{ik_1}\frac{1+\delta_{k_1j}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_1j}}$$
$$+\sum x_{ik_1}\frac{1+\delta_{k_1k_2}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_1k_2}}\cdot x_{k_2k_3}\frac{1+\delta_{k_3j}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_3j}}\quad(\text{形式的積}).$$

よって

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^2=\frac{n+1}{2}x\frac{\partial}{\partial x}+\left[x\frac{\partial}{\partial x}\right]^2,$$

ここに $[\quad]^2$ は作用素行列の形式的な巾を表わす．この式から

$$D_2=\frac{n+1}{2}D_1+\mathrm{tr}\left(\left[x\frac{\partial}{\partial x}\right]^2\right)$$

という関係が得られる．

一方，$\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)^2$ の (i,j) 成分は

$$\sum_{k_1,k_2,k_3=1}^{n}\left(x_{k_1k_2}\frac{1+\delta_{ik_1}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{ik_1}}\right)\circ\left(x_{k_3j}\frac{1+\delta_{k_2k_3}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_2k_3}}\right)$$
$$=\sum x_{k_1k_2}\cdot\frac{1}{2}(\delta_{ik_3}\delta_{k_1j}+\delta_{ij}\delta_{k_1k_3})\frac{1+\delta_{k_2k_3}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_2k_3}}$$
$$+\sum x_{k_1k_2}\frac{1+\delta_{ik_1}}{2}x_{k_3j}\frac{1+\delta_{k_2k_3}}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_{ik_1}\partial x_{k_2k_3}}$$
$$=\frac{1}{2}\sum x_{jk_2}\frac{1+\delta_{k_2i}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_2i}}+\frac{1}{2}\delta_{ij}\sum x_{k_1k_2}\frac{1+\delta_{k_2k_1}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_2k_1}}$$
$$+\sum\frac{1+\delta_{ik_1}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{ik_1}}\cdot x_{k_1k_2}\cdot\frac{1+\delta_{k_2k_3}}{2}\frac{\partial}{\partial x_{k_2k_3}}\cdot x_{k_3j}\quad(\text{形式的積}).$$

よって

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)^2=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)1_n+\left[\frac{\partial}{\partial x}x\right]^2.$$

明らかに $\mathrm{tr}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}x\right]^k\right)=\mathrm{tr}\left(\left[x\frac{\partial}{\partial x}\right]^k\right)$ $(k=1,2,\cdots)$ であるから，上式により

$$\mathrm{tr}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}x\right)^2\right)=\frac{n+1}{2}D_1+\mathrm{tr}\left(\left[\frac{\partial}{\partial x}x\right]^2\right)=D_2.$$

したがって (23) から (21) $(k=2)$ が得られる．(証終)

注意. 一般に $k \geqslant 3$ に対し (21) は成立しない. 例えば

$$\iota^* \circ D_3 \circ \iota^* = -\mathrm{tr}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x} x\right)^3\right)$$

$$= -D_3 + \frac{n}{2} D_2 - \frac{1}{2} D_1^2.$$

線形代数雑談

I, p. 176

1. 3次の実対称行列 A に対して $\mathrm{rank}\, A = 0, 1, 2, 3$ であり, A の $\approx$ に関する同値類は $\mathrm{rank}\, A$ によって定まるから, $\approx$ に関しては4個の同値類が生じる. $\mathrm{rank}\, A = r$ であるような A の同値類は $\simeq$ に関しては Sylvester の定理により $(r+1)$ 個の同値類に分れる. よって全体として $\simeq$ に関する同値類の個数は $1+2+3+4 = 10$. ($\sim$ に関する同値類はもちろん無限個ある.)

2. A, B を二つの n 次実対称行列とし, $A \sim B$ とする. A, B の固有値は一致するから, その共通の固有値を (重複度まで入れて) $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ とする. そのとき, 直交行列 T_1, T_2 があって

$$T_1^{-1} A T_1 = T_2^{-1} B T_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

よって $T = T_1 T_2^{-1}$ とおけば, T も直交行列で

$${}^t T A T = T^{-1} A T = T_2 T_1^{-1} A T_1 T_2^{-1} = B.$$

よって $A \simeq B$.

3. 定義により

$$(f(a_i)) = (a_i') = (a_i)L, \qquad (g(a_i')) = (a_i'') = (a_i')M.$$

よって底 (a_i') に関して $g \longleftrightarrow M$. 従って底 (a_i) に関しては

$$f \longleftrightarrow L, \qquad g \longleftrightarrow LML^{-1}.$$

よって

$$g \circ f \longleftrightarrow (LML^{-1})L = LM.$$

II, p. 185

1. W^S がベクトル空間になることはその条件を一つ一つ試めしてみればよい. 例えば加法の結合律は次のように証明される : $f, g, h \in W^S$ とすれば, 任意の $x \in S$ に対し, 定義により

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= (f(x)+g(x))+h(x),\\ (f+(g+h))(x) &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= f(x)+(g(x)+h(x)).\end{aligned}$$

W における加法の結合律から

$$(f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)).$$

ゆえに

$$((f+g)+h)(x) = (f+(g+h))(x).$$

これが任意の $x\in S$ に対して成立するから，写像として

$$(f+g)+h = f+(g+h).$$

次に S が有限集合のとき，$S=\{1,2,\cdots,n\}$ とおく．また W の一つの底 (b_i) $(1\leqslant i\leqslant m)$ をとる．任意の i,j $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ に対し

$$f_{ij}(k) = \begin{cases} b_i & (k=j)\\ 0 & (k\neq j)\end{cases}$$

によって，$f_{ij}\in W^S$ を定義すれば，mn 個の写像 (f_{ij}) が W^S の一つの底になることは直ちにわかる．よって $\dim W^S = mn$.

2.　対応 $f\longleftrightarrow F$ の定義から

$$\begin{aligned}F(\varphi(x),y) &= (f(y))(\varphi(x)) = ({}^t\varphi(f(y)))(x),\\ F(x,\varphi(y)) &= (f(\varphi(y)))(x).\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}&F(\varphi(x),y) = F(x,\varphi(y)) \qquad (x,y\in V)\\ \Longleftrightarrow\ &{}^t\varphi(f(y)) = f(\varphi(y)) \qquad (y\in V)\\ \Longleftrightarrow\ &{}^t\varphi\circ f = f\circ\varphi.\end{aligned}$$

3.　二つのベクトル空間が互いに双対的であることをいうには“非退化”な双一次関数の存在をいえばよい．（II，3 の終末参照）$f\in\mathrm{Hom}\,(V,W)$，$g\in\mathrm{Hom}\,(W,V)$ に対し

$$F(f,g) = \mathrm{tr}(f\circ g)$$

とおけば，これが非退化な双一次関数であることは容易にわかる．実際，V,W の底をとり，f,g の行列をそれぞれ $A=(\alpha_{ij})$，$B=(\beta_{ij})$ とすれば，上式は

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i,j=1}^{m,n}\alpha_{ij}\beta_{ji}$$

に等しい．これは双一次関数 F の行列が mn 次の単位行列（従って正則）になることを示す，以上．

Ⅲ, p. 196

1. $f=\sum_i \alpha_i f^i$, $f(a_i)=\alpha_i'$ とおき $\alpha_i=\alpha_i'$ をいえばよい.

$$\alpha_i'=f(a_i)=\sum_j \alpha_j f^j(a_i)=\sum_j \alpha_j \delta_i{}^j=\alpha_i.$$

2. $\varphi\longleftrightarrow y\otimes f$ とすれば, $\varphi(x)=f(x)y$ である. 実際, 同型 $W\otimes V^*\cong \mathrm{Hom}(W^*\times V, K)$ (Ⅲ, (17) において V, W を W, V^* でおきかえたもの) において $y\otimes f$ に対応する双一次形式を $\varphi_{y,f}$ とかけば

$$\varphi_{y,f}(g,x)=g(y)\cdot f(x) \qquad (g\in W^*,\ x\in V).$$

一方, 同型 $\mathrm{Hom}(V, W)\cong \mathrm{Hom}(W^*\times V, K)$ (Ⅱ, (8) において W を W^* でおきかえたもの) により $\varphi\longleftrightarrow\varphi_{y,f}$ とすれば

$$g(\varphi(x))=\varphi_{y,f}(g,x).$$

よって $g(\varphi(x))=g(y)\cdot f(x)=g(f(x)y)$. これが任意の $g\in W^*$ に対して成立するから, $\varphi(x)=f(x)y$ を得る.

従って $y, f\neq 0$ のとき, $\varphi(V)=Ky$ となるから, $\mathrm{rank}\,\varphi=\dim\varphi(V)=1$. しかし $\dim V$, $\dim W\geqq 2$ のとき, $\mathrm{Hom}(V, W)$ はもちろん $\mathrm{rank}\,\varphi\geqq 2$ となるような一次写像 φ をも含むから, $\{y\otimes f \mid y\in W,\ f\in V^*\}$ は $W\otimes V^*$ の真部分集合である.

Ⅳ, p. 207

1. $\boldsymbol{F}_4=\{0,1,\omega,\omega^2\}$ とかくことにすれば, 次の 5 本の直線が存在する.

$$\{(0,0),\ (1,0),\ (\omega,0),\ (\omega^2,0)\},$$
$$\{(0,0),\ (1,1),\ (\omega,\omega),\ (\omega^2,\omega^2)\},$$
$$\{(0,0),\ (1,\omega),\ (\omega,\omega^2),\ (\omega^2,1)\},$$
$$\{(0,0),\ (1,\omega^2),\ (\omega,1),\ (\omega^2,\omega)\},$$
$$\{(0,0),\ (0,1),\ (0,\omega),\ (0,\omega^2)\}.$$

一般に $\boldsymbol{F}_{p^m}$ 上の “平面” (2 次元ベクトル空間) $(\boldsymbol{F}_{p^m})^2$ においては

$$((\boldsymbol{F}_{p^m})^2 \text{ 上の点の個数})=p^{2m},$$
$$(\text{一つの直線上の点の個数})=p^m.$$

$(\boldsymbol{F}_{p^m})^2$ の 0 以外の点はただ一本の直線 (1 次元部分空間) の上にあり, 0 はすべての直線に共有される. よって直線の個数を N とすれば

$$p^{2m}=(p^m-1)N+1,$$
$$\therefore\quad N=(p^{2m}-1)/(p^m-1).$$

2.
$$\begin{aligned}\Delta(x_1,x_2,x_3)&=(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)\\&=x_1^2x_2+x_1^2x_3+x_1x_2^2+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2\\&=(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)+x_1x_2x_3\end{aligned}$$

$$= s_1s_2+s_3.$$

3. $\boldsymbol{F}_4$ では1の原始3乗根 ω が存在するから，複素数のときと同様にして

$$C(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (\xi_1+\xi_2+\xi_3)(\xi_1+\omega\xi_2+\omega^2\xi_3)(\xi_1+\omega^2\xi_2+\omega\xi_3)$$

を得る．$\boldsymbol{F}_3$ のときは直接計算して

$$C(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \\ \xi_3 & \xi_1 & \xi_2 \\ \xi_2 & \xi_3 & \xi_1 \end{vmatrix} = \xi_1^3+\xi_2^3+\xi_3^3$$
$$= (\xi_1+\xi_2+\xi_3)^3.$$

V，p. 217

1. まず定義から $\mathscr{A} = \mathrm{Ker}\,\varphi$．(19) から

$$\varphi S = 0 \Longleftrightarrow \alpha_{ii} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

従って $\mathscr{A}$ は

$$S(x) = \sum_{i \neq j} \alpha_{ij}\xi_i\eta_j = \sum_{i<j} \alpha_{ij}(\xi_i\eta_j+\xi_j\eta_i)$$

なる形の双一次形式全体からなる．従って (18) により $\mathscr{A} = \phi(Q)$，また $\dim \mathscr{A} = \frac{1}{2} \cdot n(n-1)$．

2. 問題の式は ψ_2, ψ_3 の定義式から直ちに出る．f が2次形式ならば，$(\psi_2 f)(x, y)$ は $V\times V$ 上の（対称）双一次形式になる．従って $(\psi_2 f)(x,y)$ が y について線形なことから，$\psi_3 f \equiv 0$ を得る．

3. $F \in \mathrm{Hom}(V\times V\times V, K)$ に対して

$$(\theta_1 F)(x,y,z) = F(y,x,z),$$
$$(\theta_2 F)(x,y,z) = F(z,y,x)$$

とおく．そのとき

$$(\theta_1\theta_2 F)(x,y,z) = \theta_2 F(y,x,z) = F(z,x,y),$$
$$(\theta_2\theta_1 F)(x,y,z) = \theta_1 F(z,y,x) = F(y,z,x).$$

よって定義により

$$F \in \mathscr{A}' \Longleftrightarrow (1+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1)F = 0.$$

また明らかに

$$F \in \mathscr{S}\oplus\mathscr{A} \Longrightarrow (1+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1)F = 3F.$$

よっていま $F = F_1+F_2+F_3$, $F_1 \in \mathscr{S}$, $F_2 \in \mathscr{A}$, $F_3 \in \mathscr{A}'$ とすれば

$$F_1+F_2 = \frac{1}{3}(1+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1)F,$$

$$F_3 = \frac{1}{3}(2-\theta_1\theta_2-\theta_2\theta_1)F. \qquad (*)$$

更に，$\theta_1(F_1+F_2)=F_1-F_2$ であるから

$$F_1=\frac{1}{2}(1+\theta_1)(F_1+F_2)$$

$$=\frac{1}{6}(1+\theta_1)(1+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1)F, \tag{**}$$

$$F_2=\frac{1}{2}(1-\theta_1)(F_1+F_2)$$

$$=\frac{1}{6}(1-\theta_1)(1+\theta_1\theta_2+\theta_2\theta_1)F. \tag{***}$$

よって F_1, F_2, F_3 は一意的に定まる．また任意の F に対し F_1, F_2, F_3 を (*), (**), (***) によって定義すれば容易に $F=F_1+F_2+F_3$, $F_1\in\mathcal{S}$, $F_2\in\mathcal{A}$, $F_3\in\mathcal{A}'$ であることが確かめられる．よって

$$\mathrm{Hom}(V\times V\times V, K)=\mathcal{S}\oplus\mathcal{A}\oplus\mathcal{A}'.$$

VI，p. 227（VII，補題1の証明．ただし補題1では L が M になっている.）

まず L^0 が R-部分加群であることの証明：$x, y\in L^0$ とすれば，ある $\gamma, \delta\in S=R-\{0\}$ があって，$\gamma x=\delta y=0$．そのとき $\gamma\delta(x\pm y)=0$, $\gamma\delta\in S$ であるから，$x\pm y\in L^0$．また任意の $\alpha\in R$ に対し $\gamma(\alpha x)=\alpha\gamma x=0$．よって，$\alpha x\in L^0$，以上．

(i)⇒(ii) の証明：$(a_1, \cdots, a_n)$ を L の一つの底とする．$x\in L^0$ とし，$x=\sum\xi_i a_i$ $(\xi_i\in R)$ とする．そのときある $\gamma\in S$ があって，$\gamma x=\gamma(\sum\xi_i a_i)=\sum(\gamma\xi_i)a_i=0$．よって $\gamma\xi_i=0\Longrightarrow\xi_i=0$ $(1\leqslant i\leqslant n)$．従って $x=0$．ゆえに $L^0=\{0\}$．

(ii)⇒(iii) の証明：VI，4で説明したように $V=S^{-1}L$ が定義され，$K=S^{-1}R$ 上のベクトル空間になることがいえれば，L は自然に V の中に埋め込まれる．まず“分数” x/β $(x\in L,\ \beta\in S)$ の相等を

$$x/\beta=x'/\beta'\Longleftrightarrow\beta' x=\beta x'$$

によって定義する．そのとき，同値律

$$x/\beta=x/\beta,$$
$$x/\beta=x'/\beta'\Longrightarrow x'/\beta'=x/\beta,$$
$$x/\beta=x'/\beta',\ x'/\beta'=x''/\beta''\Longrightarrow x/\beta=x''/\beta''$$

を確かめる．最初の二つは自明．

$$\begin{aligned} x/\beta=x'/\beta',\ x'/\beta'=x''/\beta'' &\Longrightarrow \beta' x=\beta x',\ \beta'' x'=\beta' x'' \\ &\Longrightarrow \beta''\beta' x=\beta''\beta x'=\beta\beta' x'' \\ &\Longrightarrow \beta'' x-\beta x''\in L^0. \end{aligned}$$

仮定により $L^0=\{0\}$ であるから，$\beta'' x=\beta x''$，従って $x/\beta=x''/\beta''$ を得る．これ

から先は普通の整数から分数を作るとき（または R から $K=S^{-1}R$ を作るとき）の証明と全く同様.

(iii)⇒(i) の証明：$(a_1,\cdots,a_n)$ を V の一つの底，また $L=\langle b_1,\cdots,b_r\rangle_R$ とする．$(b_1,\cdots,b_r$ は必ずしも一次独立ではない.）$b_j=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{ij}a_i$, $\lambda_{ij}\in K$ とおく．$K=S^{-1}R$ であるから，$\lambda_{ij}=\beta_{ij}/\gamma_{ij}$, $\beta_{ij}\in R$, $\gamma_{ij}\in S$ とかける．$\gamma=\prod_{i,j}\gamma_{ij}$ とおけば，$\gamma\lambda_{ij}\in R$. よって $\gamma b_j\in\langle a_1,\cdots,a_n\rangle_R$, $b_j\in\langle\gamma^{-1}a_1,\cdots,\gamma^{-1}a_n\rangle_R$. これがすべての $j\,(1\leqslant j\leqslant r)$ についていえるから

$$L\subset\langle\gamma^{-1}a_1,\cdots,\gamma^{-1}a_n\rangle_R=L'.$$

L' は自由だから VI，定理2により L も自由である.

VII，p. 240 （補題2の証明.）

(i)⇒(iii). L_1 が L の直和因子であるとすれば，L のある R-部分加群 L_2 があって $L=L_1\oplus L_2$ となる．$(a_1,\cdots,a_{n_1})$ を L_1 の底，$(b_1,\cdots,b_{n_2})$ を L_2 の底とすれば，$(a_1,\cdots,a_{n_1},b_1,\cdots,b_{n_2})$ は L の一つの（R 上の）底になる．従ってそれは V の（K 上の）底にもなっている．さて $L_1\subset L\cap V_1$ は明らか．逆の包含関係 $\supset$ をいうために，$x\in L\cap V_1$ とすれば

$$x=\sum_{i=1}^{n_1}\lambda_i a_i+\sum_{j=1}^{n_2}\mu_j b_j,\qquad \lambda_i,\mu_j\in R$$

とかける．一方，$x\in V_1$ であるから

$$x=\sum_{i=1}^{n_1}\lambda_i' a_i,\qquad \lambda_i'\in K$$

とかくこともできる．よって表示の一意性から，$\lambda_i=\lambda_i'$, $\mu_i=0$，従って

$$x=\sum\lambda_i a_i\in L_1$$

を得る．よって $L\cap V_1\subset L_1$，従って $L\cap V_1=L_1$.

(iii)⇒(ii). (iii) を仮定する．(ii) をいうためには，補題1により，L/L_1 が K 上のあるベクトル空間の中に埋め込まれることをいえばよい．$x,x'\in L$ に対し

$$(*)\qquad x\equiv x' \pmod{L_1}\Longrightarrow x\equiv x' \pmod{V_1}$$

は自明であるから，L/L_1 から V/V_1 の中への写像

$$\varphi:[x]_{L_1}\longmapsto[x]_{V_1}$$

が定義される．φ は明らかに R-加群の準同型であるが，条件 (iii) により (*) の逆 ($\Longleftarrow$) もいえるからそれは1対1（単射）に，従って R-加群の“埋め込み”になる.

(ii)⇒(i). L/L_1 が自由であるとし，その一つの底を $(c_1,\cdots,c_{n_2})$ とする．c_j の L における“代表”，すなわち $c_j=[b_j]_{L_1}$ となるような $b_j\in L$ をとり，$L_2=\langle b_1,\cdots,b_{n_2}\rangle_R$ とおく．そのとき，任意の $x\in L$ に対し，ある $\mu_j\in R$ があって

$$[x]_{L_1} = \sum \mu_j c_j = \sum \mu_j [b_j]_{L_1}$$

となる．よって

$$x_2 = \sum \mu_j b_j, \qquad x_1 = x - x_2$$

とおけば，$[x_1]_{L_1} = [x]_{L_1} - [x_2]_{L_1} = 0$．よって $x_1 \in L_1$，従って $L = L_1 + L_2$ となる．また $x = \sum \mu_j b_j \in L_1$ とすれば，$[x]_{L_1} = \sum \mu_j c_j = 0$．従ってすべての $\mu_j = 0$, i.e. $x = 0$．よって $L_1 \cap L_2 = 0$．以上により $L = L_1 \oplus L_2$ が証明された．（証終）

第6章, p. 72への補遺
(第1版, 第4刷に追加)

[第3刷までのp. 71, 定理2の証明中にあった誤りを訂正するため, p. 71～72における二, 三の記号を修正した. さらにp. 72の7行目*印をつけた文章の後に以下の数行を挿入する. 誤りを指摘して下さった伊原信一郎・上林達治両氏に感謝する.]

……さらに上記 U, $F_\alpha(x)$ を次の条件をみたすようにとることができる. すなわち, $x, x' \in U$ に対し

(*) $\qquad xG = x'G \iff F_\alpha(x) = F_\alpha(x') \qquad (\alpha = 1, \cdots, p).$

したがって, 任意の $x_0 \in U$ に対し, $x_0 G \cap U$ は方程式 $F_\alpha(x) = F_\alpha(x_0)$ $(\alpha = 1, \cdots, p)$ で定義されている. ……

上記追加した部分の証明は次のようにすればよいであろう. まず記号を簡略化するために, $\mathrm{A} = \{(i, j) \mid 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ とおき, $\alpha = (i, j) \in \mathrm{A}$ に対応して $x_\alpha = x_{ij}$ とかくことにする. したがって行列 $x = (x_{ij}) \in GL(n, \boldsymbol{R})$ を $x = (x_\alpha)$ のようにかく. 特に $\delta_\alpha = \delta_{ij}$ (クロネッカーのデルタ) とおき, 単位行列を $1_n = (\delta_\alpha)$ とかき表わす. 今, $\dim G = m$ とすれば, A の m 箇の元からなる部分集合 $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ があって, $\{x_\beta\ (\beta \in \mathrm{B})\}$ が 1_n の近傍 W における局所座標を与える. (以下, 添数 α, β, γ はそれぞれ A, B, A−B の上を動くものとする.) よって $y_\beta = x_\beta$ $(\beta \in \mathrm{B})$ とおけば, G の W におけるパラメーター表示

(1) $\qquad x_\alpha = f_\alpha(y_\beta\ (\beta \in \mathrm{B})) \qquad (\alpha \in \mathrm{A})$

が得られる. (ただし, $\alpha \in \mathrm{B}$ に対しては $f_\alpha(y_\beta\ (\beta \in \mathrm{B})) = y_\alpha$ とおくものとする.) 1_n の十分小さい δ''-近傍

$$\{(y_\beta, z_\gamma) \mid |y_\beta - \delta_\beta| < \delta'',\ |z_\gamma - \delta_\gamma| < \delta''\}$$

において定義される独立変数 y_β $(\beta \in \mathrm{B})$, z_γ $(\gamma \in \mathrm{A}-\mathrm{B})$ を考え

$$(2)\qquad \begin{cases} x^{(1)}=(x_\alpha{}^{(1)}), & x_\alpha{}^{(1)}=f_\alpha(y_\beta\ \ (\beta\in \mathrm{B})) \\ x^{(2)}=(x_\alpha{}^{(2)}), & x_\alpha{}^{(2)}=\begin{cases}\delta_\alpha & (\alpha\in \mathrm{B}) \\ z_\alpha & (\alpha\in \mathrm{A-B}),\end{cases} \\ x=x^{(2)}\cdot x^{(1)}=(x_\alpha) \end{cases}$$

とおく．δ'' が十分小さければ $x\in U$ である．x_α を y_β, z_γ の関数と考えれば，簡単な計算により

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial x_{ij}}{\partial y_{kl}}=\sum\limits_{p=1}^{n} x_{ip}{}^{(2)}\dfrac{\partial f_{pj}}{\partial y_{kl}} & ((k,l)\in \mathrm{B}), \\ \dfrac{\partial x_{ij}}{\delta z_{kl}}=\delta_{ik}f_{lj} & ((k,l)\in \mathrm{A-B}) \end{cases}$$

である．これから写像 $(y_\beta, z_\gamma)\longmapsto(x_\alpha)$ のヤコビアン

$$J(y_\beta, z_\gamma)=\det\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}, \frac{\partial x_\alpha}{\partial z_\gamma}\right)$$

を $x=1_n$ において計算すれば，

$$J(1_n)=J(\delta_\beta,\delta_\gamma)=\det\left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial y_{kl}}, \delta_{ik}\delta_{lj}\right)_{y_\beta=\delta_\beta}$$

$$=\det\left(\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\beta}\right)_{\alpha,\beta\in \mathrm{B}}\right)_{y_\beta=\delta_\beta}=1$$

となる．よって 1_r の近傍でこの対応は 1 対 1 である．よって U を十分小さい適当な近傍 U' でおきかえ，

$$\begin{cases} W'=U'\cap G, \\ W''=(\text{部分空間 } \{x_\beta=\delta_\beta\ \ (\beta\in \mathrm{B})\} \text{ における } 1_n \text{ の適当な近傍}) \end{cases}$$

とすれば，対応 $x=x''\cdot x' \longleftrightarrow (x'', x')$ により

$$U'\approx W''\times W' \qquad (C^\infty\text{-同型})$$

であるようにできる．さらに $W''^{-1}W''\cap G=\{1\}$ であるとしてよい．(W'' を，$W_1''^{-1}W_1''\subset U'$ となるようなより小さい近傍 W_1'' で，U' を $W_1''\cdot W'$ で，おきかえればよい．) そのとき $x\in U'$ に対し

$$F_\alpha(x)=x_\alpha''-\delta_\alpha \qquad (\alpha\in \mathrm{A-B})$$

とおけば，関数 F_α が条件 (*) をみたすことは明らかであろう．

索　引

た行

な行

は行

ま行

や行

ら行

わ行

欧文字

著者紹介

佐武一郎（さたけいちろう）

1927年　山口県に生れる.
1950年　東京大学理学部数学科卒業.
1968年　カリフォルニア大学教授（現在，名誉教授）.
1980年　東北大学教授.
現　在　中央大学教授.
主　著　線型代数学（裳華房），Algebraic Structures of Symmetric Domains（岩波書店，Princeton Univ. Press），リー環の話（日本評論社）.

佐武一郎著『リー群の話』

1982年5月10日　第1版第1刷
1995年3月30日　第1版第8刷

著　者　佐武一郎
発行者　大石進
発行所　日本評論社
〒170　東京都豊島区南大塚 3-12-4
印　刷　大洋印刷産業株式会社
製　本　松岳社

ISBN4-535-60110-0